

5. Rijit Cisim Dengesi

Bu bölümde, rijit cisim dengesinin temel kavramları ele alınacaktır.

Denge, hem ivmeli hareketle cismin ötelenmesini önlemek için kuvvetlerin dengesini, hem de cismin dönmesini önlemek için momentlerin dengesini gerektirir.

Mühendislik problemlerinin çoğu simetrik yükler içerir ve cisim üzerine etki eden bütün kuvvetler tek bir düzlem üzerine izdüşülerek çözülebilir.

Bu nedenle, bu bölümün ilk kısmında, bir düzlemsel veya iki boyutlu kuvvet sistemine maruz kalan bir cismin dengesi ele alınacaktır.

Böyle problemlerin geometrisi çok karmaşık değildir, bu yüzden analiz için skaler çözüm uygundur.

Üç boyutlu kuvvet sistemlerine maruz kalan rijit cisimlerin genel incelenmesi bu bölümün ikinci kısmında verilecektir.

Bu tip problemlerin çoğu, en iyi vektör analizi kullanılarak çözülebilir.

5. 1 Rijit Cisim Denge Koşulları

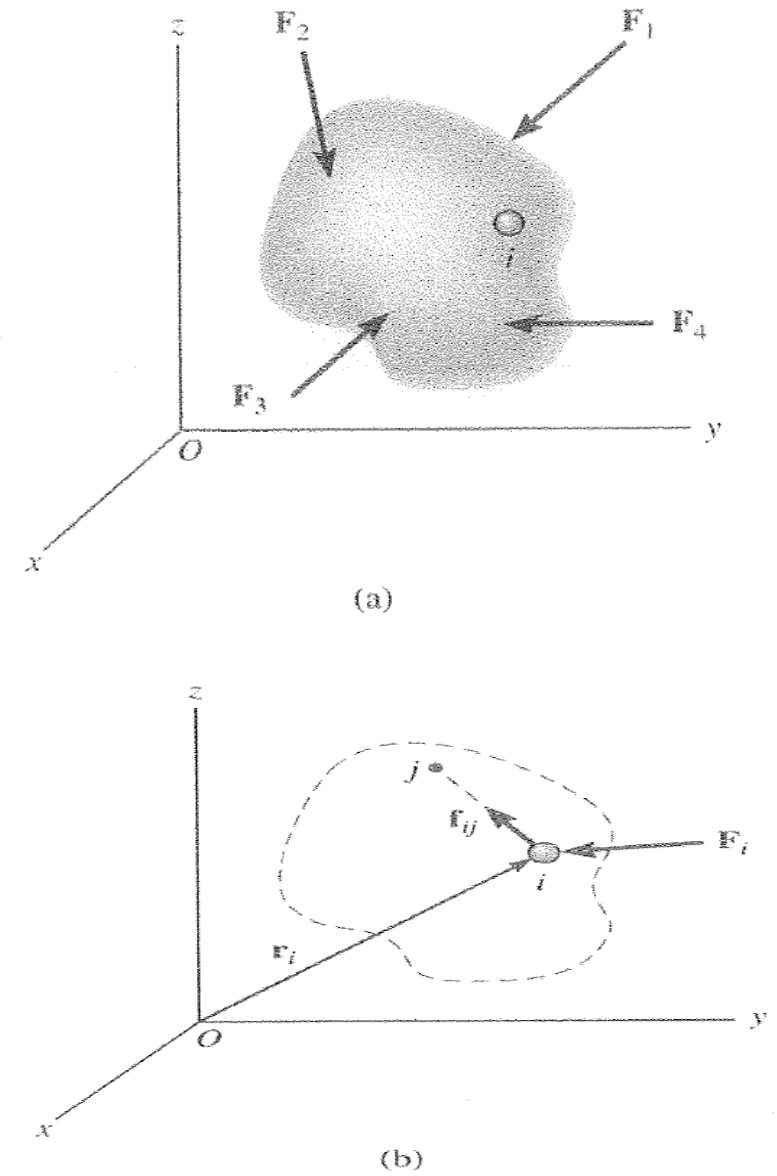
Bölüm 3 'te, sukünette kalan veya sabit hızla hareket eden bir parçacığın dengede olduğunu ifade etmiştik.

Bunun gerçekleşmesi için, parçacık üzerine etkiyen bileşke kuvvetin sıfıra eşit olması hem gerekli hem yeterlidir.

Bunu kullanarak, şimdi bir rijit cismin dengede kalması için gerekli koşulları elde edeceğiz.

Bunun için, x , y , z sisteminde sabit kalan ve sukünetteki veya referans sistemine göre sabit hızla hareket eden Şekil 5-1 a 'daki rijit cismi göz önüne alalım.

Cismin keyfi i 'yinci parçacığının serbest cisim diyagramı Şekil 5-1 b' de gösterilmiştir. Cisim üzerine etki eden iki tip kuvvet vardır.



Şekil 5-1

Sembolik olarak;

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_{ij} \quad (j \neq i)$$

ile gösterilen iç kuvvetler, diğer parçacıkların i 'yinci parçacık üzerine uyguladığı ve $\mathbf{f}_i$ bileşkesini üreten kuvvetlerdir.

Şekil 5-1 b'de bu parçacıkların sadece biri gösterilmiş olsa da, toplam cismi oluşturan bütün parçacıklar üzerinden alınır.

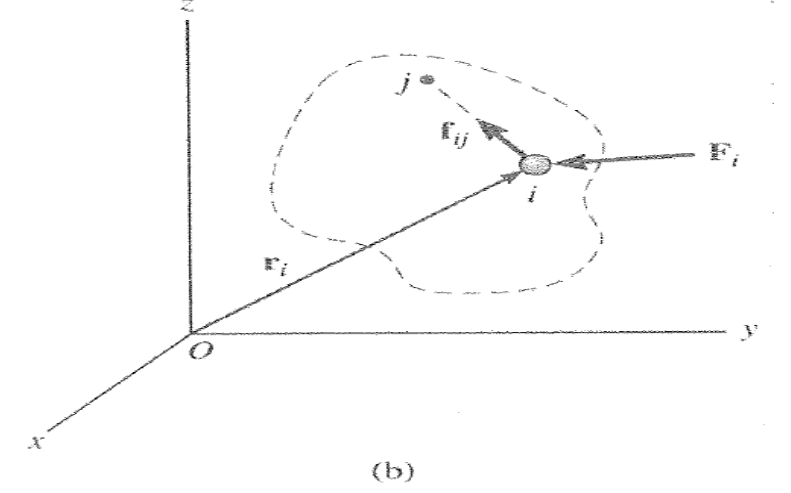
Bu toplam $i = j$ için anlamsızdır, çünkü i 'yinci parçacık kendi üzerine bir kuvvet uygulamaz.

$\mathbf{F}_i$ bileşke dış kuvveti göstermektedir.

Parçacık dengede ise, Newton'un birinci kanunu uygulayarak;

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = 0$$

buluruz.



Şekil 5-1

Diğer parçacıklara da denge denklemi uygulandığı takdirde, benzer denklemler elde edilecektir.

Bu denklemler vektörel olarak toplanırsa

$$\sum \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$$

bulunur.

İç kuvvetlerin toplamı sıfırdır, çünkü cisim içindeki parçacıklar arasındaki iç kuvvetler, Newton'un üçüncü kanununa göre eşit, fakat zıt yönlü doğrusal çiftler şeklindedir.

Bu yüzden, sadece dış kuvvetlerin toplamı kalır ve böylece,

$$\sum \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{F}$$

denerek, yukarıdaki denklem

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi de i'yinci parçacık üzerine etkiyen kuvvetlerin keyfi O noktasına göre momentlerini ele alalım, Şekil 5-1 b.

Parçacık denge denklemini ve vektörel çarpınım dağılıma özelliğini kullanırsak

$$\mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i = 0$$

buluruz.

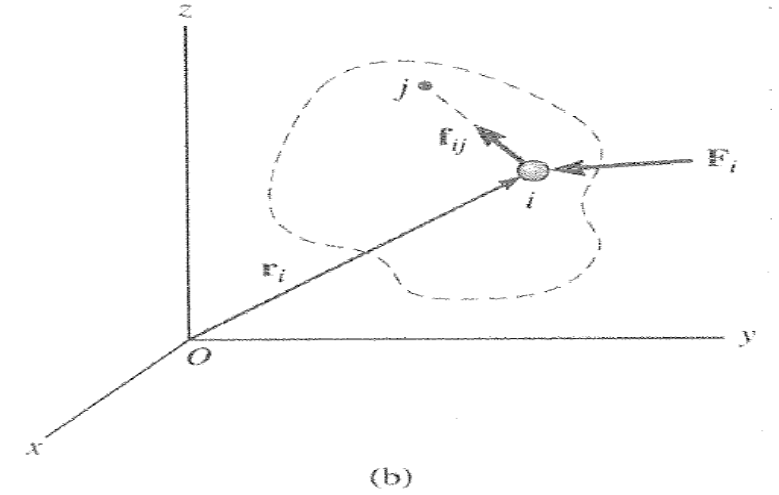
Benzer denklemler cismin diğer parçacıkları için de yazılır ve sonuçlar vektöre olarak toplanırsa

$$\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i = 0$$

elde edilir.

İkinci terim sıfırdır.

Çünkü, yukarıda ifade edildiği gibi, iç kuvvetler eşit, fakat zıt doğrusal çiftler şeklinde ortaya çıkar ve Bölüm4.4'te anlatıldığı gibi, kuvvetlerin taşınabilme özelliği nedeniyle bu çiftlerin O noktasına göre momenti sıfır olur.



Şekil 5-1

Buna göre,

$$\sum \mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

notasyonu kullanılarak, önceki denklem

$$\sum \mathbf{M}_O = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Dolayısıyla, rijit cismin denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{M}_O = 0 \quad (5-1)$$

Bu denklemler, bir rijit cismin dengede olması için, cisim üzerine etkiyen bütün dış kuvvetlerin toplamının ve dış kuvvetlerin bir noktaya göre momentleri toplamının sıfıra eşit olması gerektiğini ifade eder.

Böylece, denge için bu denklemlerin gerekli olduğunu ispat ettik.

Bunlar aynı zamanda yeter koşullardır.

Bunu göstermek için, kuvvet sistemi cisim üzerinde 5-1 denklemlerini sağladığı halde, cismin dengede *olmadığını* ve cismin dengesinin sağlanması için bir $\mathbf{F}'$ ek kuvvetine ihtiyaç duyulduğunu varsayalım.

Bu takdirde, denge denklemleri ;

$$\sum \mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{M}_O + \mathbf{M}'_O = 0$$

olur.

Buradaki $\mathbf{M}'_O$, $\mathbf{F}'$ nün O 'ya göre momentidir.

$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ve $\sum \mathbf{M}_O = 0$ olduğundan, $\mathbf{F}' = \mathbf{0}$ olması gerekir (bunun gibi $\mathbf{M}'_O = 0$ olmalıdır).

Yani, cismin dengesi için $\mathbf{F}'$ kuvvetine gerek yoktur ve gerçekten, 5-1 denklemleri denge için yeterlidir.

5.2 Serbest Cisim Diyagramları (İki Boyutta Denge)

Denge denklemlerinin başarıyla uygulanması, cisim üzerine etkiyen bilinen ve bilinmeyen bütün dış kuvvetlerin kesin olarak belirtilmesini gerektirir.

Bunun için en iyi yol, cismin serbest cisim diyagramını çizmektir.

Bu diyagram, cismi, çevresinden izole edilmiş veya "serbest" kalmış bir şekilde ana hatlarını, yani bir "serbest cismi" gösteren bir taslaktır.

Bu taslak üzerinde, çevredekilerin cisim üzerine uyguladığı bütün kuvvet ve kuvvet çifti momentlerini göstermek gerekir.

Bu diyagram kullanılırsa, denge denklemleri uygulanırken, cisme uygulanan tüm kuvvetler ve kuvvet çifti momentlerinin etkisi hesaba katılabilir.

Bu nedenle, *mekanikte, problemleri çözmede, serbest cisim diyagramının nasıl çizileceğinin anlaşılması birincil öneme sahiptir.*

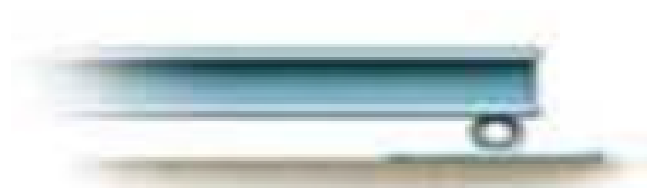
Mesnet Tepkileri: Serbest cisim diyagramının nasıl çizileceğine ilişkin prosedürü sunmadan önce, düzlemsel kuvvetlere maruz cisimler arasındaki mesnetler ve mesnet noktalarında oluşan çeşitli tepki tiplerini ele alacağız.

Genel kural: Bir mesnet cismin verilen bir doğrultuda ötelenmesini engelliyorsa, cisim üzerinde söz konusu doğrultuda bir kuvvet ortaya çıkar. Aynı şekilde, cismin dönmesi engelleniyorsa, cisim üzerinde bir kuvvet çifti momenti uygulanır.

Örneğin, kiriş gibi yatay bir parçanın ucundaki üç mesnet türünü ele alalım.

İlk mesnet yöntemi bir tekerlek veya silindirden ibarettir, Şekil 5-2 a.

Bu tip mesnet sadece kirişin düşey doğrultuda ötelenmesini önler, tekerlek kiriş üzerinde sadece bu doğrultuda bir kuvvet uygular, Şekil 5-2b.



a tekerlek



Şekil 5-2

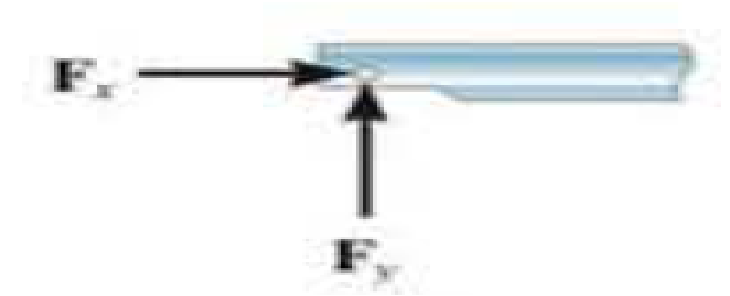
Kiriş, şekil 5-3 a'da gösterildiği gibi, bir pim kullanılarak daha kısıtlayıcı bir şekilde mesnetlenebilir.

Pim yere tutturulmuř iki elemandan ve kirişteki bir delikten geçer.

Pim, kirişin herhangi bir ϕ doğrultusunda, şekil 5-2b, ötelenmesini önler ve bu yüzden pim, kiriş üzerinde bu doğrultuda bir F kuvveti uygulamalıdır.

Analizin amaçları açısından, bu etkiyi, genellikle, F_x ve F_y bileşenleriyle ifade etmek daha kolaydır şekil 5-2 c.

F_x ve F_y bilindiği takdirde, F ve ϕ hesaplanabilir.



şekil 5-3

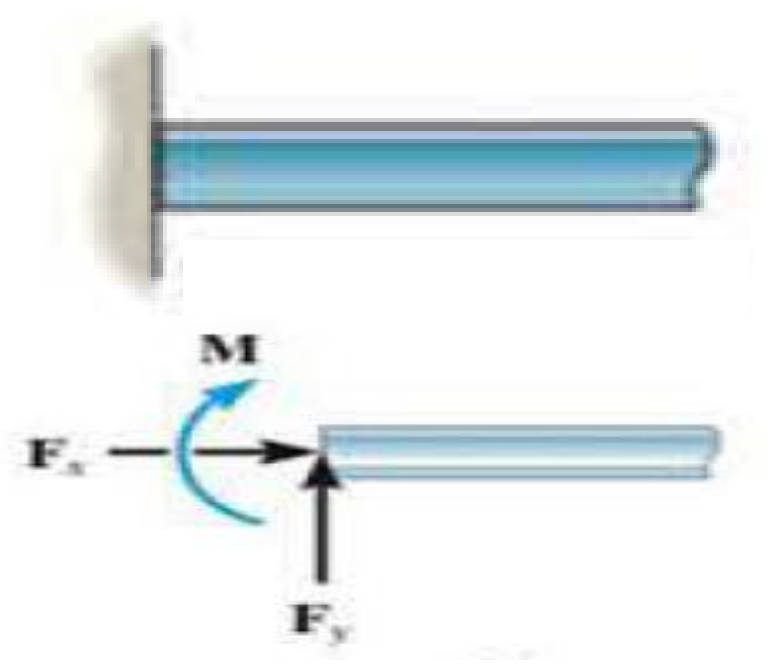
Kiriş mesnetlemenin en kısıtlayıcı yolu, Şekil 5-4 a'da gösterildiği gibi, sabit mesnet kullanmaktır.

Bu mesnet kirişin hem ötelenmesine, hem de dönmesine engel olur ve dolayısıyla bunu yapması için, bağlantı noktasında kiriş üzerine bir kuvvet ve kuvvet çifti momenti uygulamalıdır, Şekil 5-4 b.

Pim halinde olduğu gibi, kuvvet genellikle, F_x ve F_y bileşenleriyle ifade edilir.

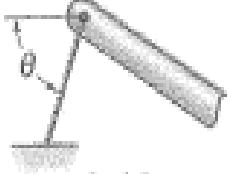
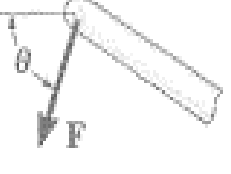
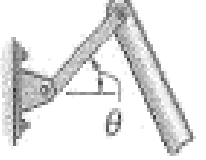
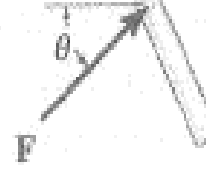
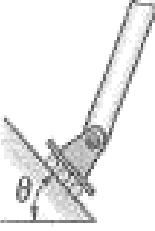
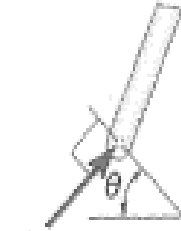
Düzlemsel kuvvetlere maruz cisimlerdeki diğer mesnet tiplerinin bir listesi Tablo 5-1 'de verilmektedir.

Bu mesnetleri göstermede kullanılan sembollerin her birini ve mesnetlerin temas elemanları üzerine uyguladıkları tepki tiplerini dikkatlice inceleyiniz.

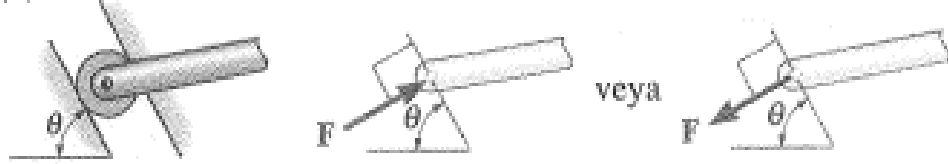


Şekil 5-4

Tablo 5.1 İki Boyutlu Kuvvet Sistemlerine Maruz Rijit Cisim Mesnetleri

Bağ Tipleri	Tepki	Bilinmeyen Sayısı
(1)  kablo		Bir bilinmeyen. Tepki kablo doğrultusunda elemandan uzaklaşan yönde etkiyen bir çekme kuvvetidir.
(2)  ağırlıksız çubuk	 veya 	Bir bilinmeyen. Tepki bağlantı çubuğu eksenine boyunca etkiyen bir kuvvettir.
(3)  tekerlek		Bir bilinmeyen. Tepki temas noktasında yüzeye dik etkiyen bir kuvvettir.

(4)



pürüzsüz olukta
tekerlek veya pim

Bir bilinmeyen. Tepki oluğa dik
etkiyen bir kuvvettir.

(5)



salınan ayak

Bir bilinmeyen. Tepki temas noktasında yüzeye dik
etkiyen bir kuvvettir.

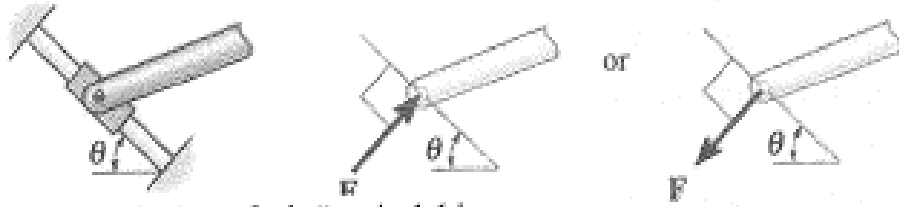
(6)



pürüzsüz temas yüzeyi

Bir bilinmeyen. Tepki temas noktasında yüzeye dik
etkiyen bir kuvvettir.

(7)



eleman, pürüzsüz çubuk üzerindeki
bileziğe pimle bağlı

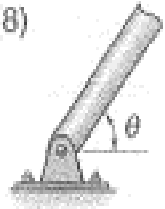
Bir bilinmeyen. Tepki çubuğa dik
etkiyen bir kuvvettir.

Bağ Tipleri

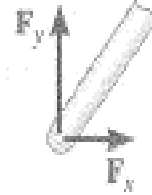
Tepki

Bilinmeyen Sayısı

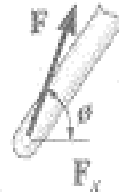
(8)



pürüzsüz pim veya
mafsal

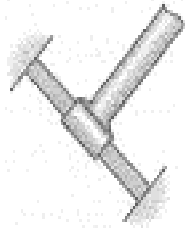


veya

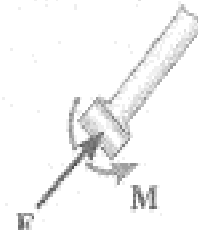


İki bilinmeyen. Kuvvetin iki bileşeni veya
bileşke kuvvetin büyüklüğü ve ϕ doğrultusu.
 ϕ ve θ 'nın eşit olması gerekmez [genellikle, çubuk
(2)'deki gibi bir bağlantı değilse, eşit değildir].

(9)

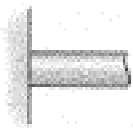


eleman, pürüzsüz çubuk üzerindeki
bileziğe sabit bağlı

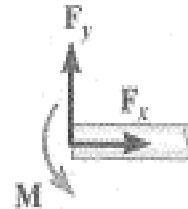


İki bilinmeyen. Kuvvet çifti momenti ve
çubuğa dik etkiyen bir kuvvet.

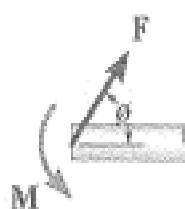
(10)



sabit mesnet



veya



Üç bilinmeyen. Kuvvet çifti momenti ve
iki kuvvet bileşeni veya kuvvet çifti momenti ve
bileşke kuvvetin büyüklüğü ve ϕ doğrultusu.

Dış ve İç Kuvvetler: Bir rijit cisim parçacıkların birleşimi olduğundan, üzerine hem dış ve hem iç yükler etki eder.

Ancak, cismin serbest cisim diyagramı çizildiğinde, iç kuvvetler diyagram üzerinde gösterilmez.

Bazı problemlerde, analiz için bağlı cisimler "sistemi"nin serbest cisim diyagramı kullanılabilir.

Bir örnek, birçok parçanın birleşiminden oluşan bir otomobilin (sistem) serbest cisim diyagramıdır.

Parçalar arasındaki bağ kuvvetlerinin, otomobilin serbest cisim diyagramında yer almayacak olan iç kuvvetleri ifade edeceği açıktır.

O halde, iç kuvvetler, serbest cisim diyagramının sınırları dahilindeki belirli bir sistem içinde yer alan parçacıklar arasında etki eder.

Bu sınır dışındaki parçacıklar veya cisimler sistem üzerine dış kuvvetler uygular ve sadece bunlar serbest cisim diyagramında gösterilmelidir.

Ağırlık ve Ağırlık Merkezi: Bir cisim bir yerçekimine maruz kaldığında, parçacıklarının her biri, Newton'un yerçekimine kanunuyla, tanımlandığı gibi, belirli bir ağırlığa sahip olur.

Cismin boyutlarının Dünya'nınkilere göre "küçük" olduğunu varsayarsak, bu yerçekimi kuvvetleri, cismin sınırları dahilindeki parçacıklar üzerine etkiyen paralel kuvvetler sistemi olarak ifade etmek uygundur.

Bölüm 4.9'da, böyle bir sistemin belirli bir noktadan geçerek etkiyen tek bir bileşke kuvvete indirgenebileceği gösterilmişti.

Bu bileşke kuvvete cismin W ağırlığı ve bu kuvvetin uygulama noktasına da G ağırlık merkezi diyoruz.

Ağırlık merkezini hesaplama yöntemini Bölüm 9'da anlatacağız.

Örneklerde ve problemlerde, cismin ağırlığı analiz için önemliyse, bu kuvvet problemin ifadesinde yer alacaktır.

Ayrıca, cismin üniform veya homojen malzemedен yapılması halinde, ağırlık merkezi cismin geometrik merkezinde yer alır; ancak, cisim homojen değilse veya gelişigüzel şekilli ise ağırlık merkezi verilecektir.

SERBEST CİSİNM DİYAGRAMI ÇİZME YÖNTEMİ

Bir rijit cismin veya tek bir sistem olarak düşünülen cisimler grubunun serbest cisim diyagramını oluşturmak için aşağıdaki adımlar izlenmelidir.

1. Adım: Cismin sınırlamalardan ve bağlantılardan soyutlandığını veya "serbest" kaldığını hayal ediniz. Cismin genel hatlarını çiziniz.

2. Adım: Cisim üzerine etkiyen bütün dış kuvvetleri ve kuvvet çifti momentlerini belirtiniz.

Bunlar,(1) uygulanan yüklerden,

(2) mesnetlerde veya temas noktalarında ortaya çıkan tepkilerden (bkz Tablo 5-1)

(3) cismin ağırlığından ileri gelir.

Bu etkilerin hepsini hesaba katmak konusunda parçacığın sınırlarını çizerek, üzerine etkiyen her bir kuvveti ve kuvvet çifti momentini işaretlemek yardımcı olabilir.

3. Adım: Kuvvetlerin momentlerinin hesaplanmasında gerekli olan cismin boyutlarını gösteriniz.

Bilinen kuvvetler ve kuvvet çifti momentleri, kendi büyüklük ve doğrultularıyla işaretlenmelidir.

Bilinmeyen kuvvetlerin ve kuvvet çifti momentlerinin büyüklük ve doğrultu açılarını göstermek için harfler kullanılır. x , y koordinat sistemi çizilir ve bu bilinmeyenler.

F_x ve F_y v. s. şeklinde gösterilir.

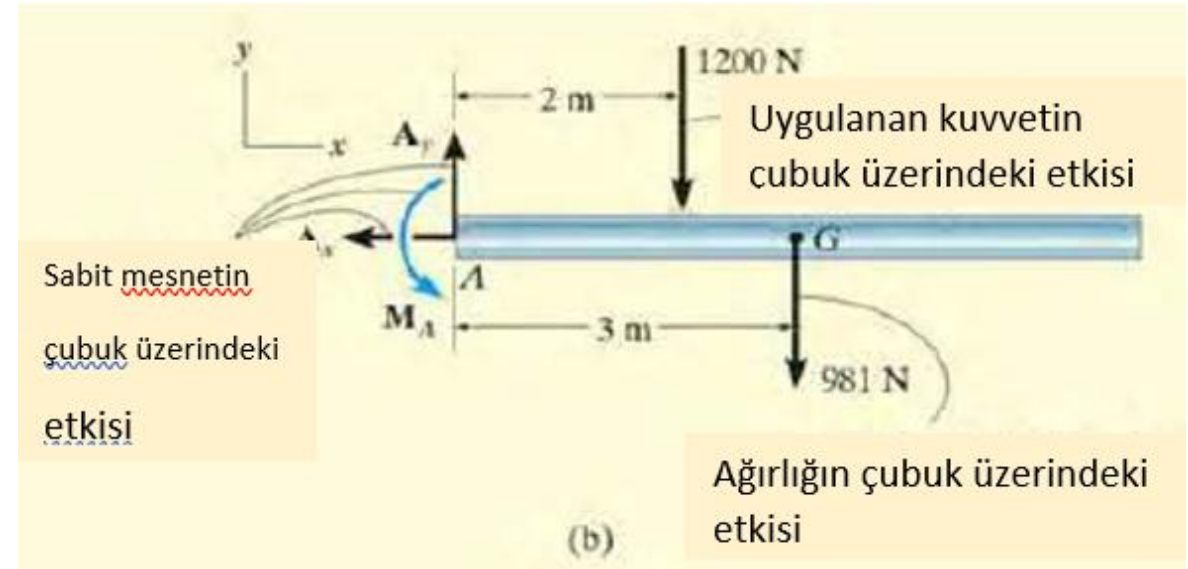
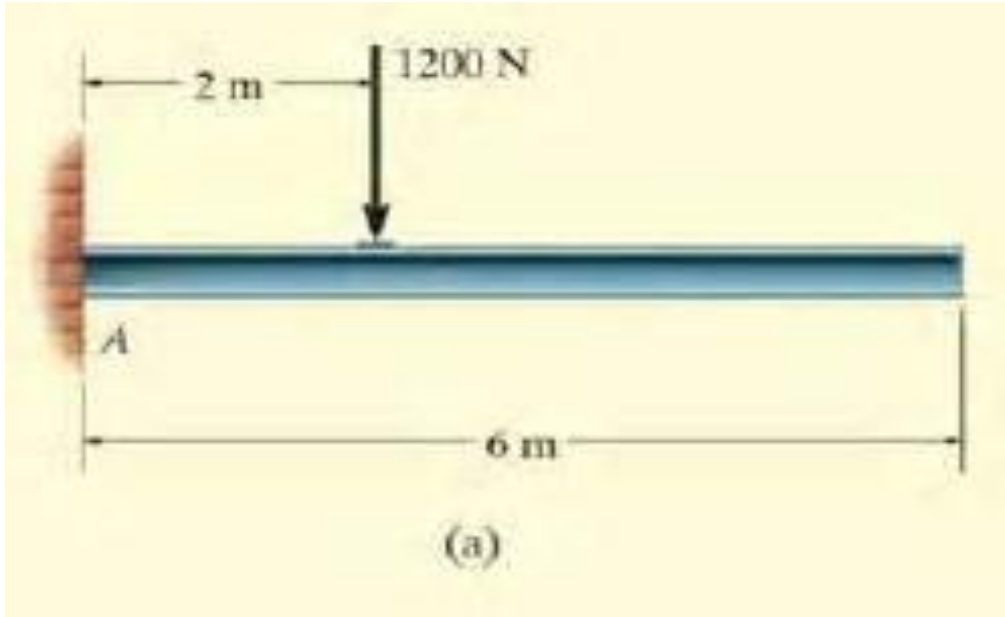
Bir kuvvetin veya kuvvet çifti momentinin etki çizgisi biliniyor, fakat büyüklüğü bilinmiyorsa, vektörün yönünü tanımlayan "ok ucu" varsayımı göre seçilebilir.

Doğru yön, büyüklük denge denklemlerinden bulunduktan sonra belli olacaktır. ,

Tanım gereği, bir vektörün büyüklüğü daima pozitiftir.

Örnek 5-1

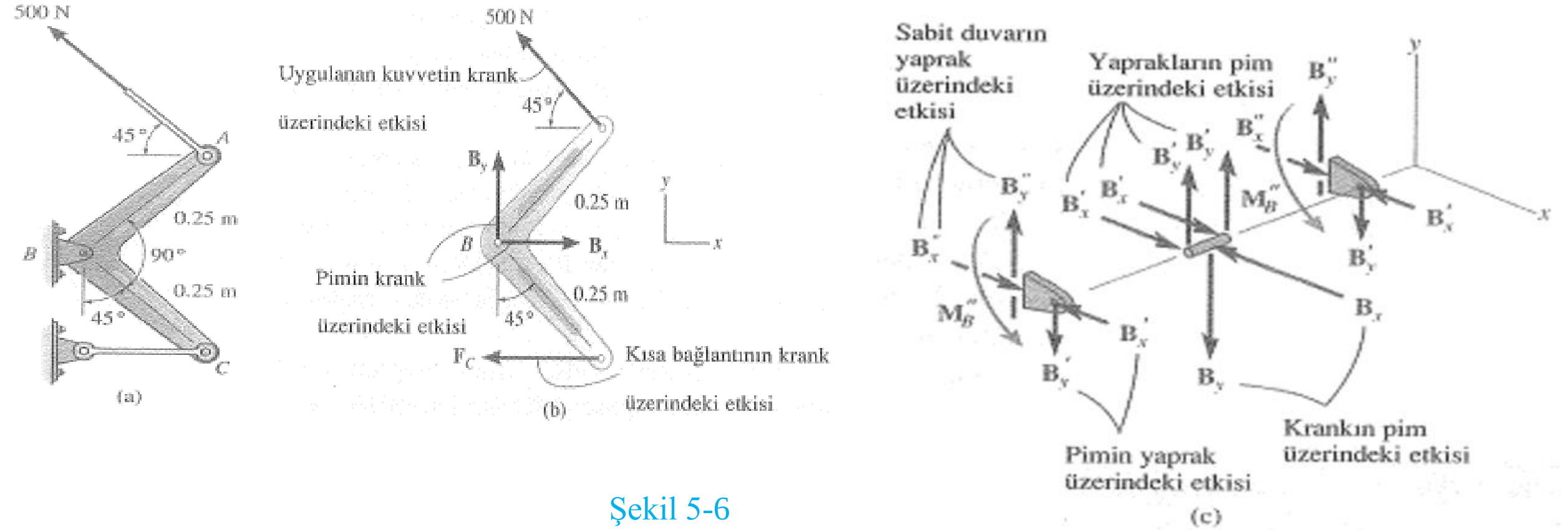
Şekil 5-5a'daki üniform kirişin serbest cisim diyagramını çiziniz? Kirişin kütlesi 100 kg'dır.



Şekil 5-5

Örnek 5-2

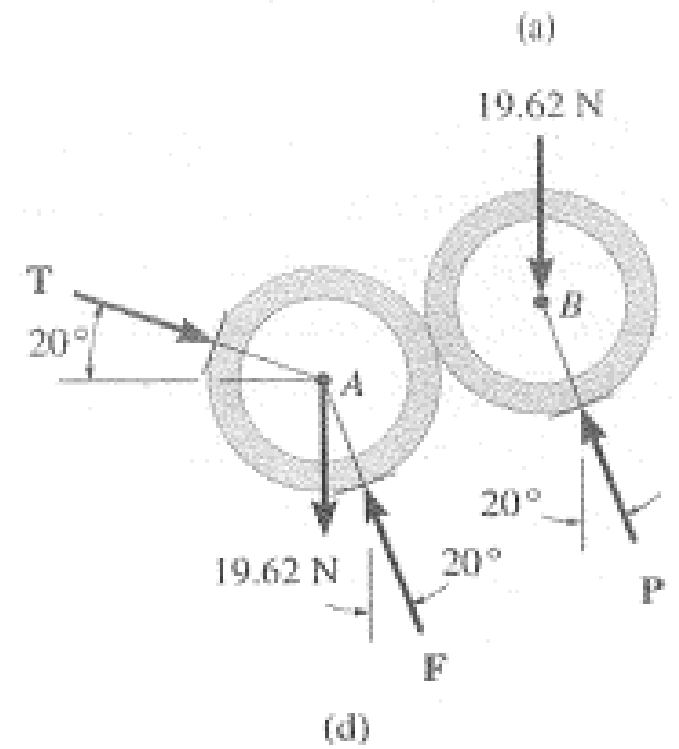
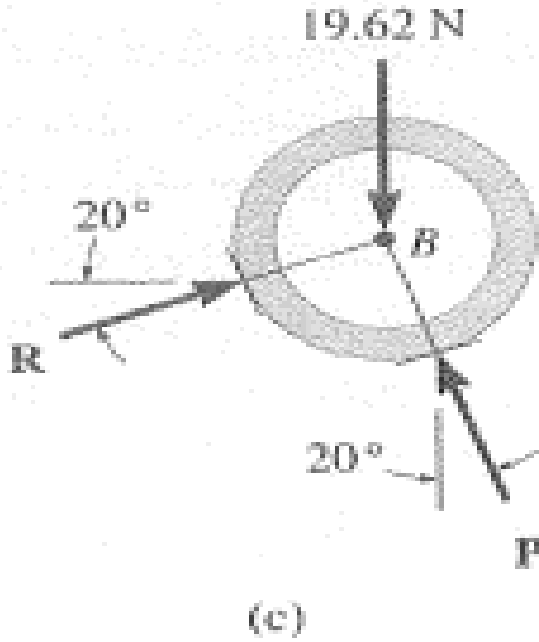
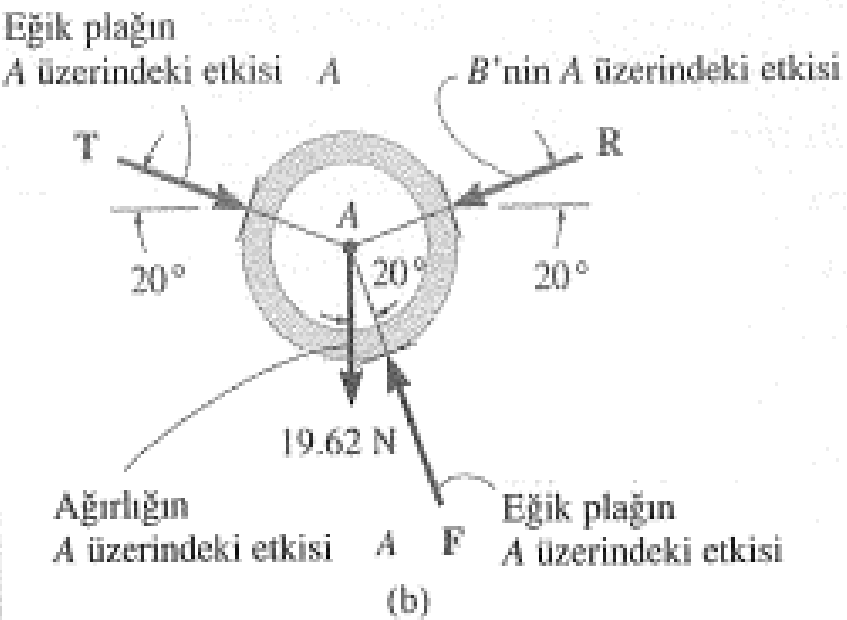
Şekil 5-6a' da gösterilen dirsekli krankın serbest cisim diyagramını çiziniz?



Şekil 5-6

Örnek 5-3

Her birinin kütlesi 2 kg olan pürüzsüz A ve B tüpü Şekil 5-7 a 'da gösterilen eğik plaklar arasında durmaktadır. A ve B tüpünün ayrı ayrı ve birlikte serbest cisim diyagramlarını çiziniz?



Şekil 5-7

5.3 Denge Denklemleri

Bölüm 5.1 'de, bir rijit cismin dengesi için gerekli ve yeterli olan iki denklemi, yani $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ve $\sum \mathbf{M}_O = 0$ denklemlerini elde etmiştik.

Cisim, tümü x-y düzleminde yer alan, bir kuvvetler sistemine maruzsa, kuvvetler x ve y bileşenlerine ayrılabilir.

Buna göre, iki boyutluda denge koşulları

$$\sum \mathbf{F}_x = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{F}_y = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{M}_O = 0 \quad (5-2)$$

olur.

Burada, $\sum \mathbf{F}_x$ ve $\sum \mathbf{F}_y$ sırasıyla, cisim üzerine etkiyen tüm kuvvetlerin x ve y bileşenlerinin cebirsel toplamını, ve $\sum \mathbf{M}_O = 0$, kuvvet çifti momentleri ile tüm kuvvet bileşenlerinin x-y düzlemine dik olan ve cismin üzerinde veya dışındaki keyfi bir O noktasından geçen bir eksene göre momentlerinin cebirsel toplamını göstermektedir.

Alternatif Denge Denklemi Takımları: Düzlemsel kuvvet sistemleri içeren denge denklemlerini çözmek için daha çok 5-2 Denklemleri kullanılır, ancak üç bağımsız denklemden oluşan iki alternatif denklem takımı da kullanılabilir.

Böyle bir denklem takımı,

$$\sum \mathbf{F}_a = \mathbf{0}$$

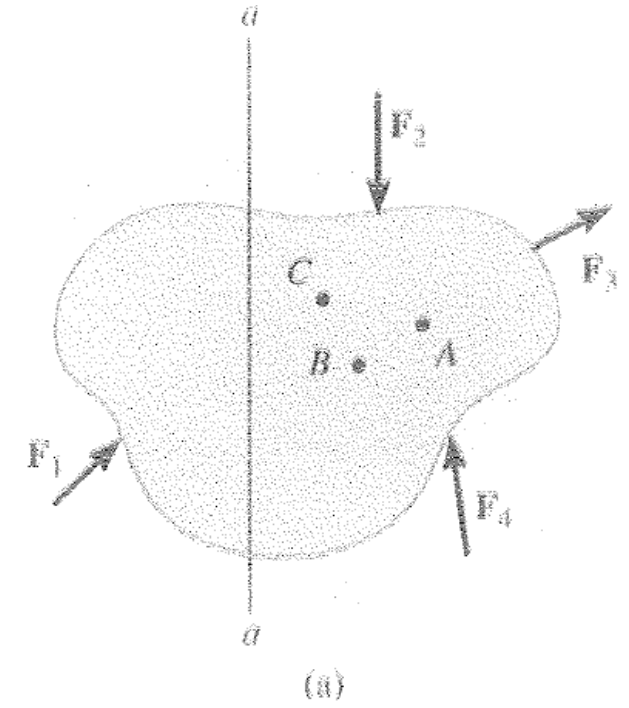
$$\sum \mathbf{M}_A = 0$$

$$\sum \mathbf{M}_B = 0 \quad (5-3)$$

dır.

Bu denklemlerin kullanılabilmesi için, A ve B moment noktalarının, a eksenine dik bir doğru üzerinde yer *almamaları* gereklidir.

5-3 Denklemlerinin denge koşulları oluşturduğunu kanıtlamak için, Şekil 5-10 a 'da gösterilen gelişigüzel şekilli bir cismin serbest cisim diyagramını ele alalım.



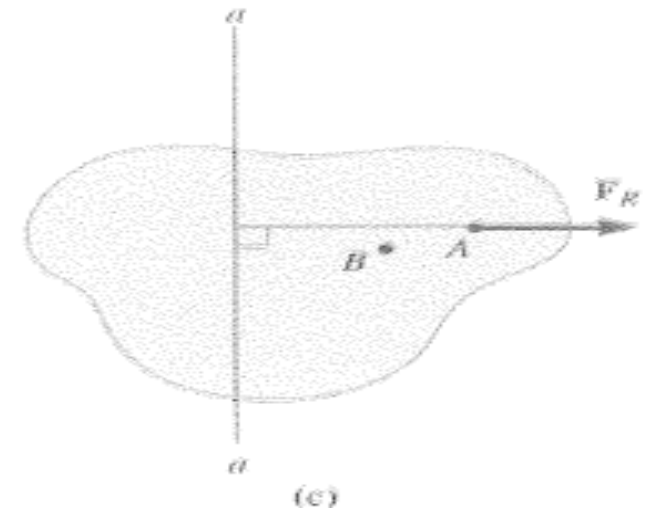
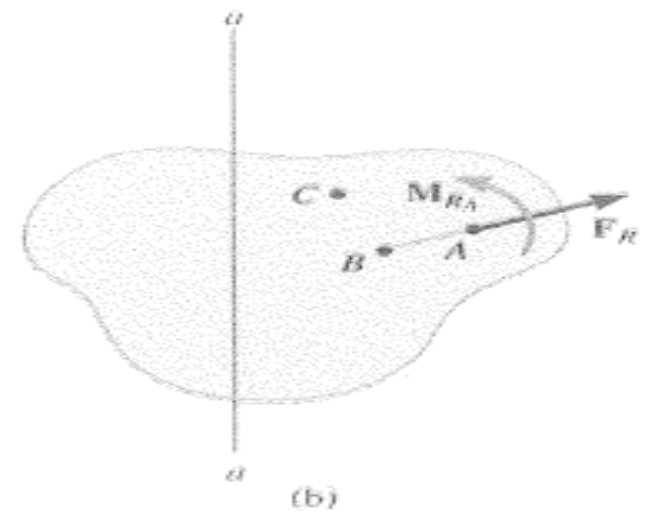
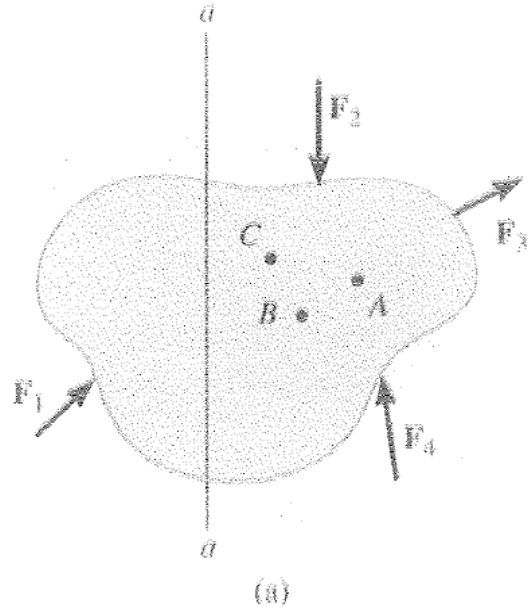
Şekil 5-10

Bölüm 4.8 'deki yöntemler kullanıldığında, serbest cisim diyagramındaki yükleme yerine, A noktasında etkiyen tek bir $\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}$ bileşke kuvveti ve bir $\mathbf{M}_{R_A} = \sum \mathbf{M}_A$ bileşke momenti konulabilir, Şekil 5-10 b.

Eğer $\sum \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ sağlanıyorsa, $\mathbf{M}_{R_A} = 0$ olmalıdır.

Ayrıca, $\mathbf{F}_R$ 'nin $\sum \mathbf{F}_a = \mathbf{0}$ koşulunu sağlaması için, a eksenini üzerinde bileşeni olmamalıdır ve bu yüzden etki çizgisi a eksenine dik olmalıdır, Şekil 5-10 c.

Son olarak, $\mathbf{F}_R$ 'nin etki çizgisi üzerinde olmayan B noktası için, $\sum \mathbf{M}_B = 0$ oluyorsa $\mathbf{F}_R = 0$ dır ve Şekil 5-10 a'da gösterilen cisim dengede olmalıdır.



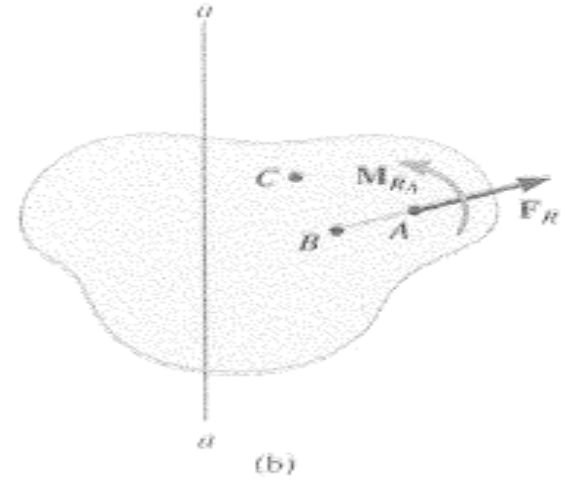
Şekil 5-10

İkinci bir alternatif denge denklemleri takımı

$$\sum \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{M}_B = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{M}_C = \mathbf{0} \quad (5-3)$$



denklemleridir.

Burada, A, B ve C noktaları aynı doğru üzerinde olmamalıdır.

Şekil 5-10

Bu denklemler sağlandığında, denge durumu oluştuğunu kanıtlamak için, tekrar Şekil 5-10b'deki serbest cisim diyagramını ele alalım.

Eğer $\sum \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ sağlanıyorsa, $\mathbf{M}_{R_A} = 0$ 'dır.

$\sum \mathbf{M}_B = \mathbf{0}$ koşulu, $\mathbf{F}_R$ 'nin etki çizgisi, gösterildiği gibi B noktasından geçiyorsa sağlanır,

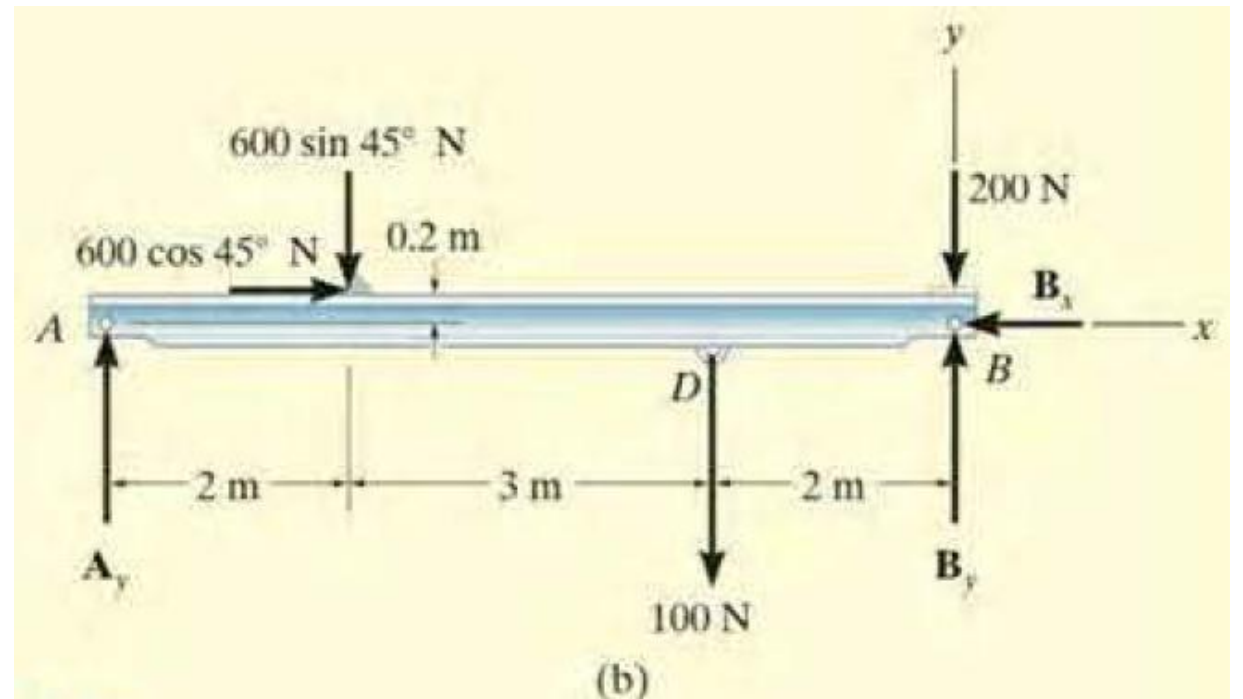
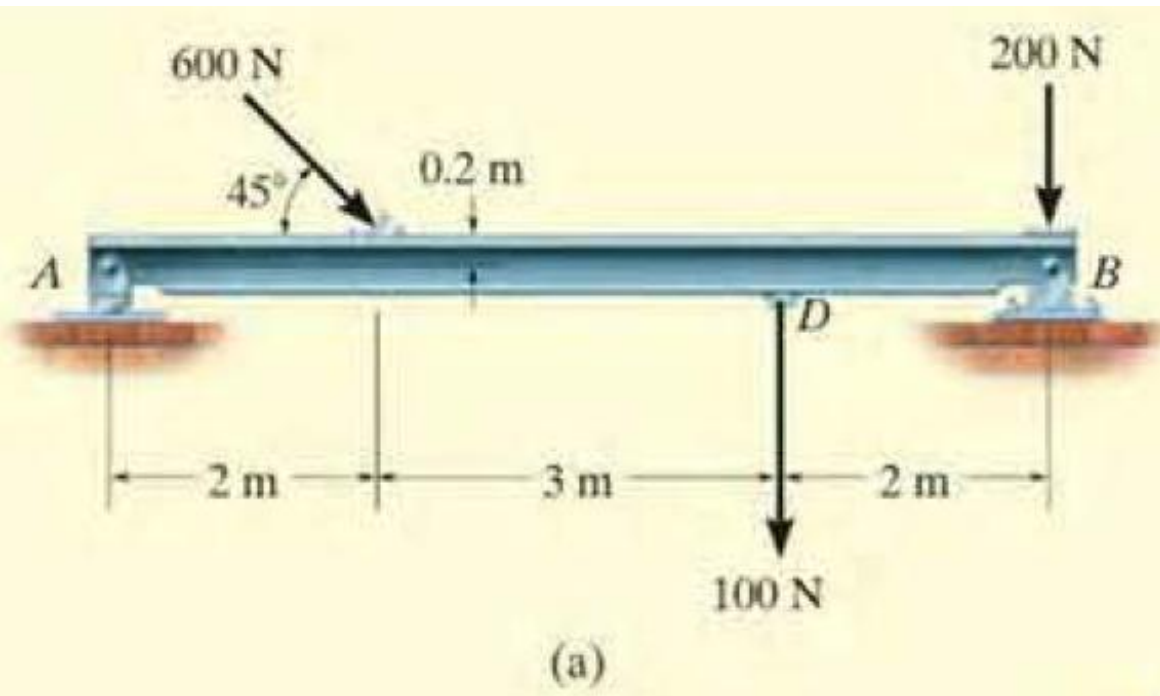
son olarak, AB doğrusu üzerinde yer almayan C noktası için, Şekil 5-10b, $\sum \mathbf{M}_C = 0$ olması gerektiğine göre, $\mathbf{F}_R = 0$ olmalıdır.

Buna göre Şekil 5-10a daki cisim dengede olmalıdır.

Örnek 5-6

Şekil 5-11a' daki yüklemeye maruz kalan kirişteki tepki kuvvetlerinin yatay ve düşey bileşenlerini belirleyiniz?

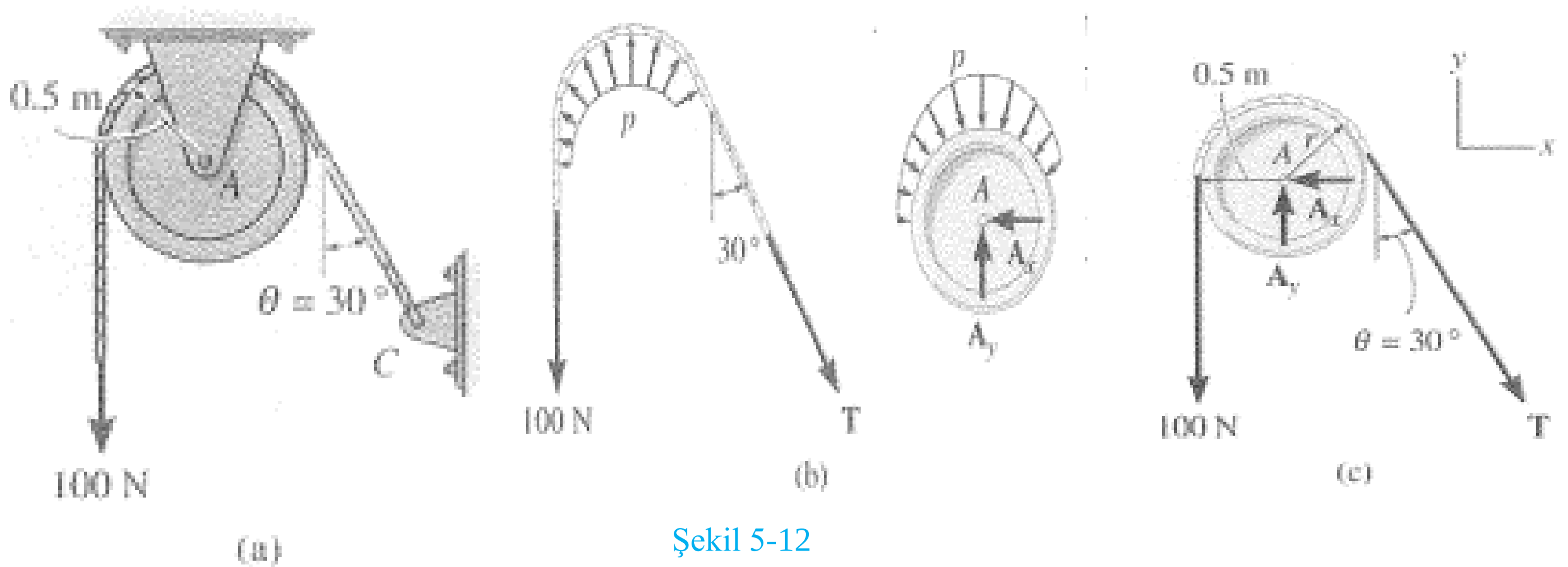
Hesaplamalarda kirişin ağırlığını ihmal ediniz.



Şekil 5-11

Örnek 5-7

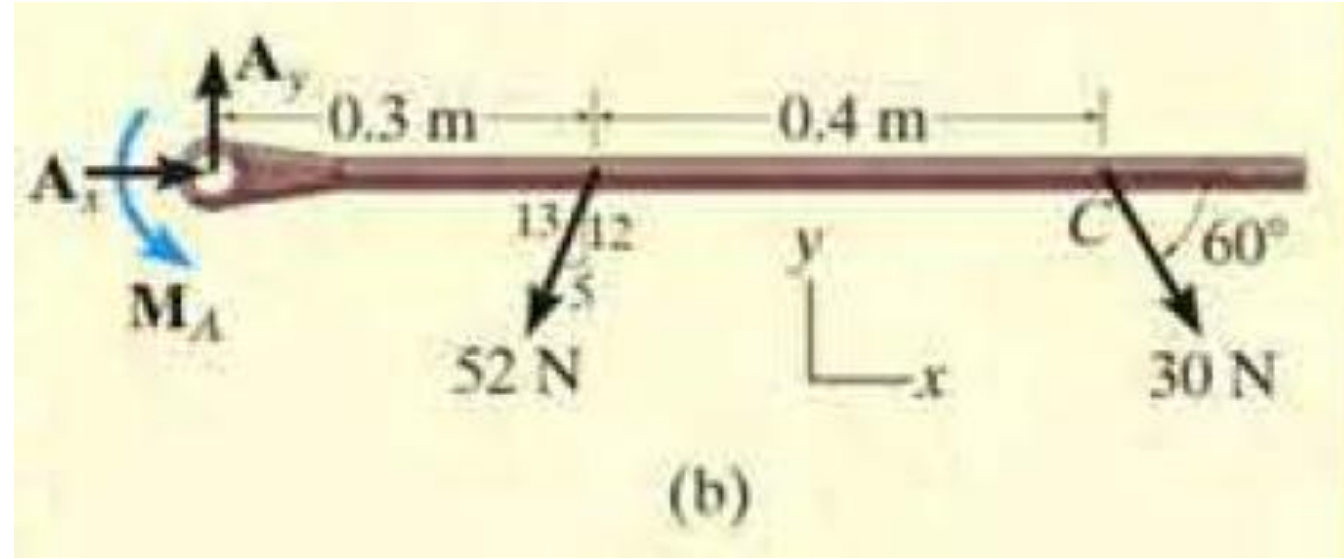
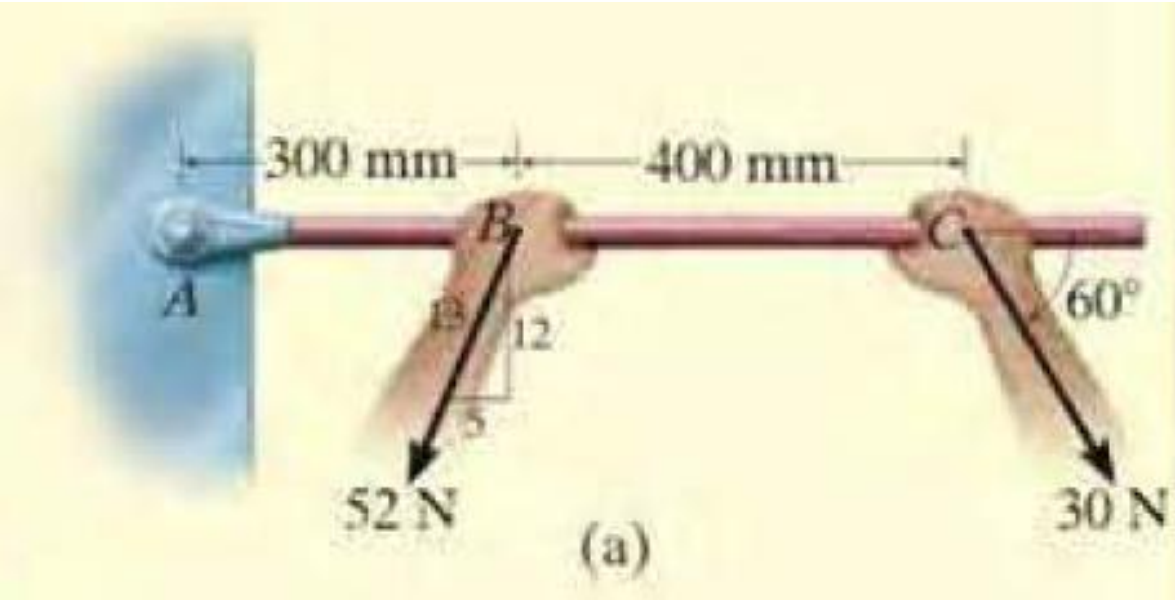
Şekil 5-12a'da gösterilen ip, 100 N'luk kuvveti tutmaktadır ve sürtünmesiz makaraya sarılmıştır. C' de ipteki çekme kuvvetini ve A pimindeki tepkinin yatay ve düşey bileşenlerini belirleyiniz?



Şekil 5-12

Örnek 5-8

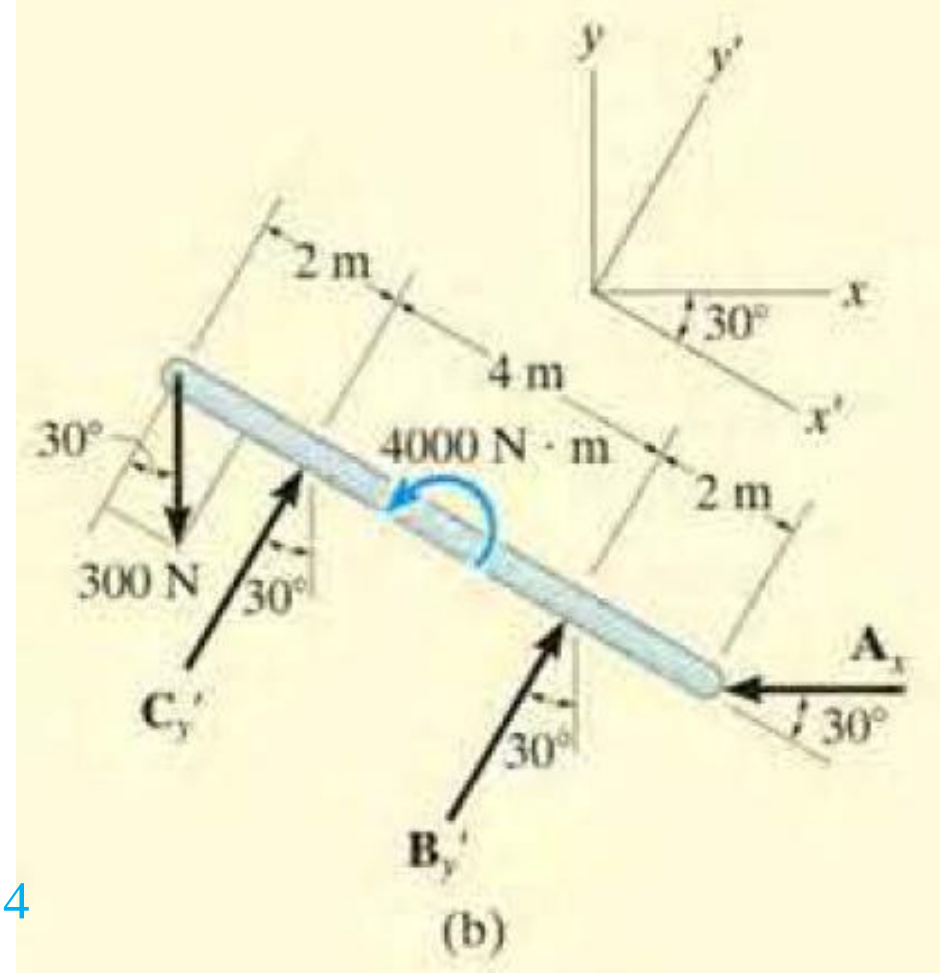
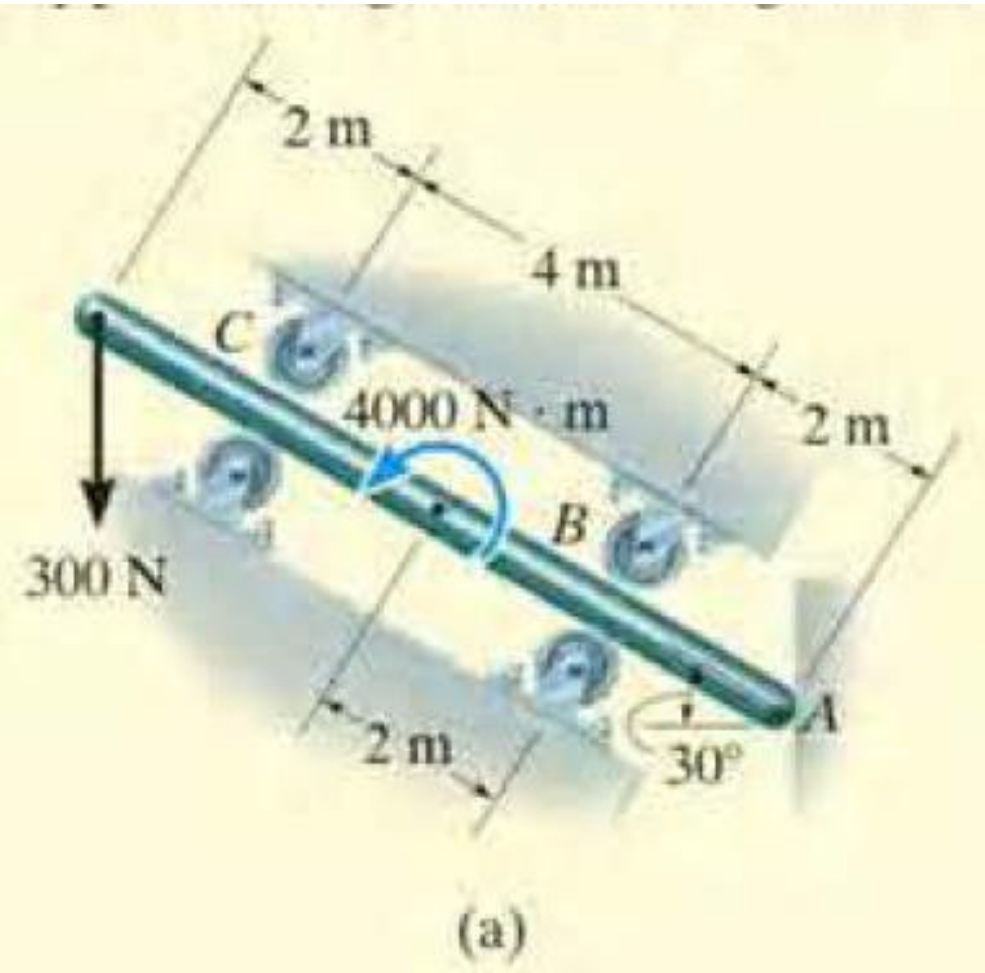
Şekil 5-13a 'daki anahtar, A 'daki cıvatayı sıkıştırmakta kullanılmaktadır. Yük tutamağa uygulandığında anahtar dönmediğine göre, cıvataya uygulanan momenti veya torku ve anahtarın cıvata üzerindeki kuvvetini belirleyiniz?



Şekil 5-13

Örnek 5-9

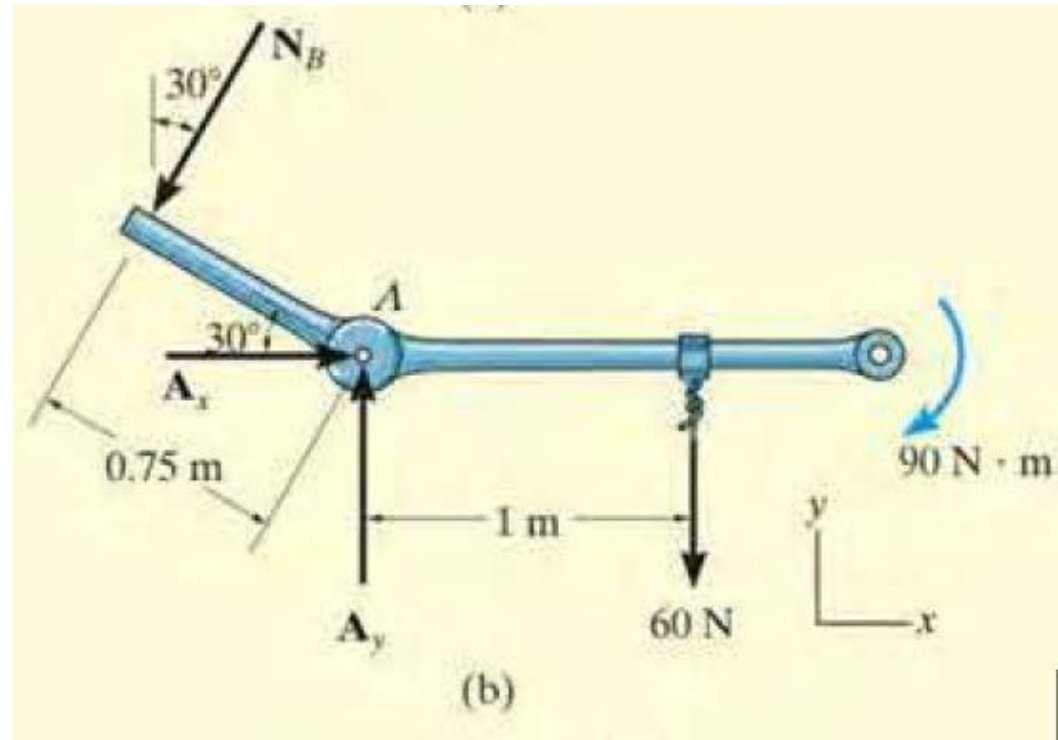
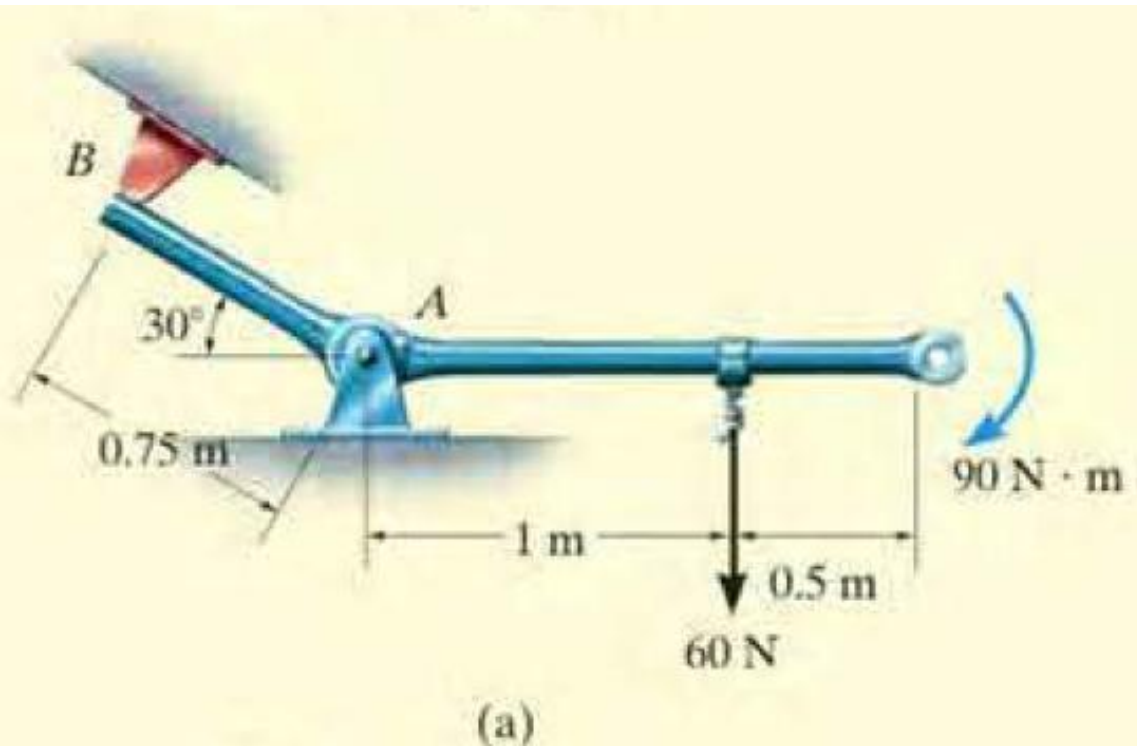
Şekil 5-14a'da gösterilen düzgün pürüzsüz çubuk üzerine bir kuvvet ve kuvvet çifti momenti uygulanmaktadır. Çubuk, A 'da pürüzsüz duvar ve B ve C' de alttan veya üstten tekerlekler tarafından desteklendiğine göre, bu mesnetlerdeki tepki kuvvetlerini belirleyiniz. Çubuğun ağırlığını ihmal ediniz.



Şekil 5-14

Örnek 5-10

Şekil 5-15a'daki bağlantı parçası, A'da mafsallıdır ve B'deki pürüzsüz mesnede dayanmaktadır. A mafsalındaki tepki kuvvetinin yatay ve düşey bileşenlerini hesaplayınız?



Şekil 5-15

5.4 İki ve Üç Kuvvetli Elemanlar

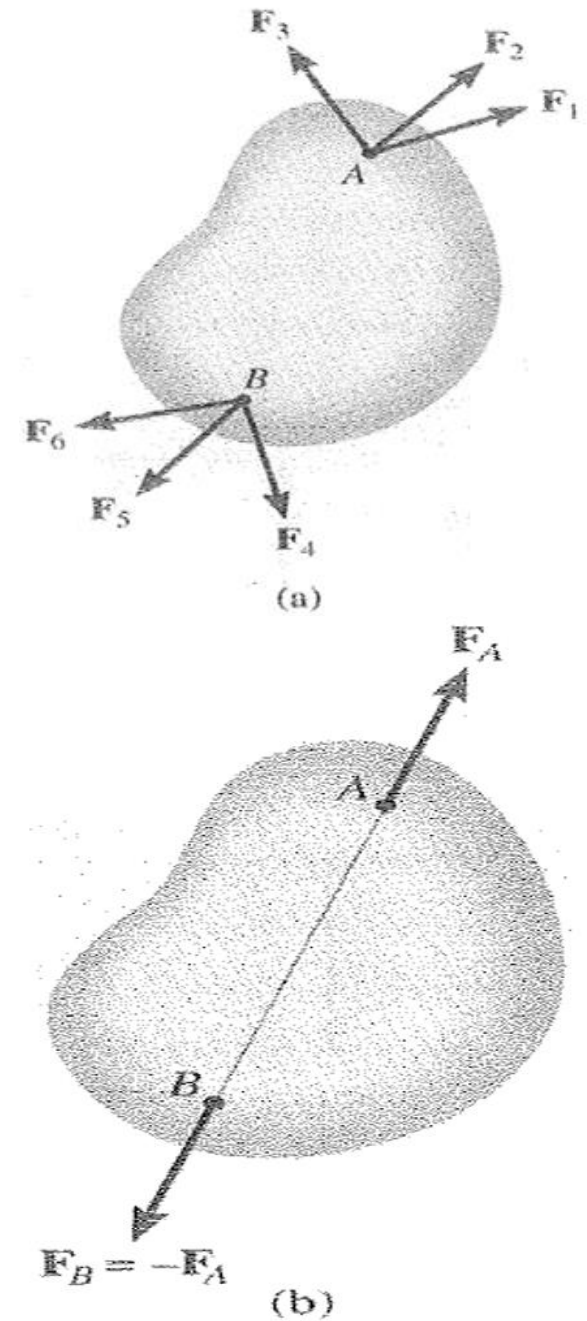
Bazı denge problemlerinin çözümü, sadece iki veya üç kuvvete maruz olan elemanlar ayırdedilebilirse kolaylaşabilir.

İki Kuvvetli Elemanlar; Bir eleman üzerine hiç moment uygulanmıyor ve kuvvetler sadece iki noktada uygulanıyorsa, bu elemana iki kuvvetli eleman denir.

Bu durumun bir örneği Şekil 5-18a'da gösterilmiştir.

Önce, A ve B' deki kuvvetler, ilgili $\mathbf{F}_A$ ve $\mathbf{F}_B$ bileşkelerini elde etmek üzere toplanır, Şekil 5-18b.

$\mathbf{F}_A$ ve $\mathbf{F}_B$, aynı büyüklüğe sahip ve birbirine ters yönlü ise, öteleme veya kuvvet dengesini ($\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$) sağlarlar.



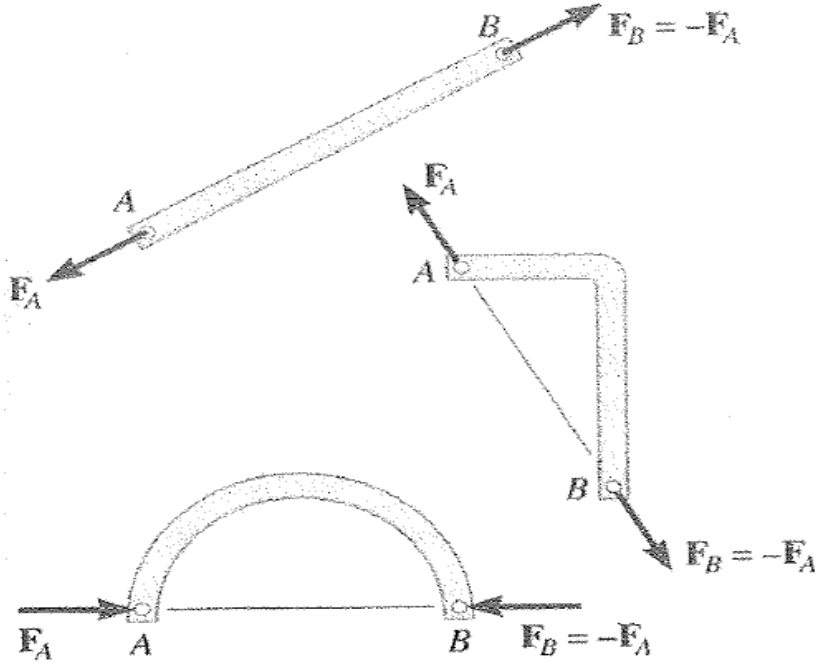
Şekil 5-18

Ayrıca, $\mathbf{F}_A$ ve $\mathbf{F}_B$ aynı doğru üzerinde ise, dönme veya moment dengesi de ($\sum \mathbf{M}_O = 0$) sağlanır.

Sonuç olarak, iki kuvvetin de etki çizgisi bilinmektedir, çünkü bu çizgi daima A ve B'den geçer.

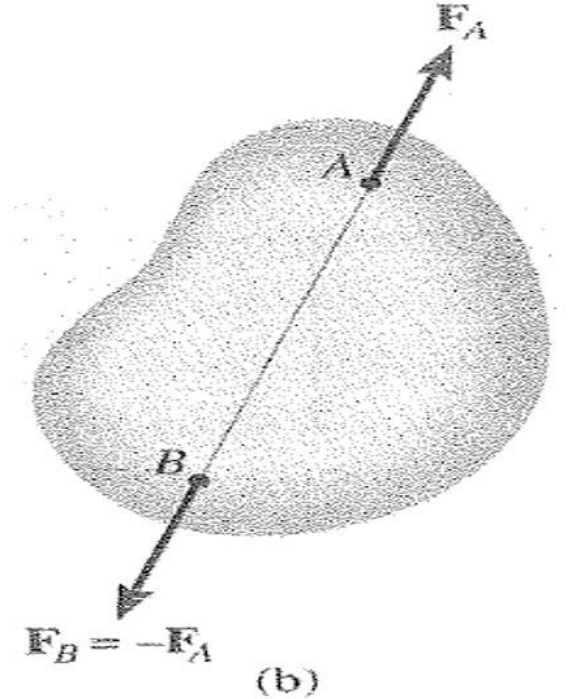
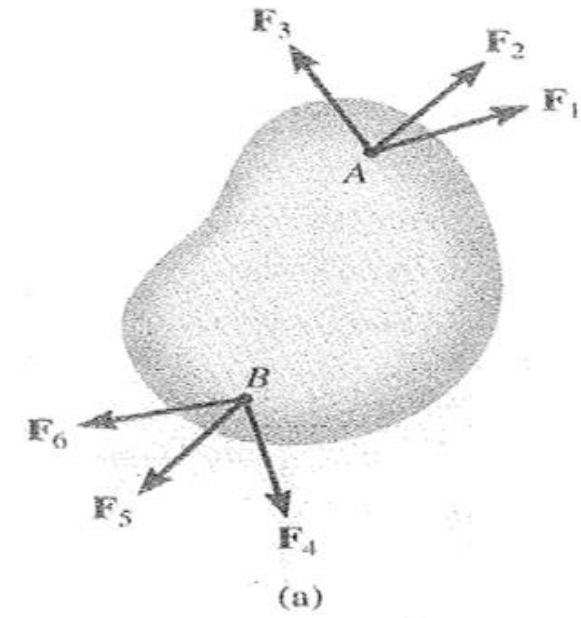
Buna göre, sadece kuvvetin büyüklüğü belirlenmeli veya ifade edilmelidir.

Dengede olan iki kuvvetli elemanlar ile ilgili diğer örnekler Şekil 5-19'da verilmiştir.



İki kuvvetli elemanlar

Şekil 5-19



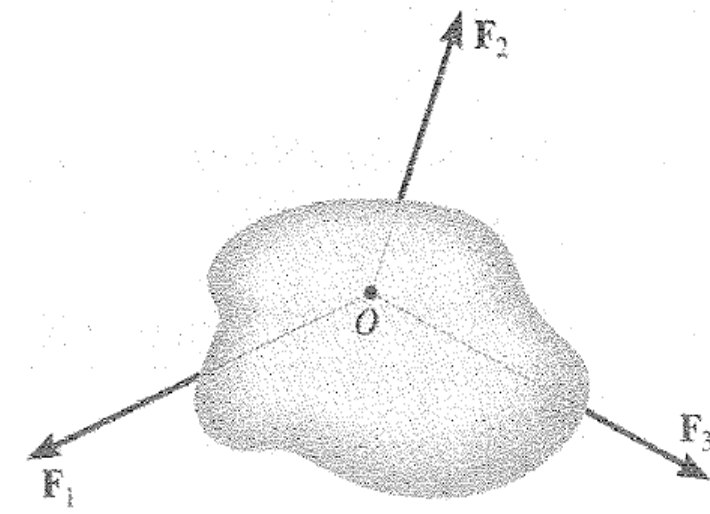
Şekil 5-18

Üç Kuvvetli Elemanlar: Bir eleman üzerine sadece üç kuvvet etkiyorsa, bu elemanın dengede olması için, kuvvetler *aynı noktadan geçmeli veya paralel* olmalıdır.

Aynı noktadan geçme şartını göstermek için, Şekil 5-20a'daki cismi ele alalım ve cismin üzerine etkiyen üç kuvvetten herhangi ikisinin etki çizgilerinin O noktasında kesiştiğini varsayalım.

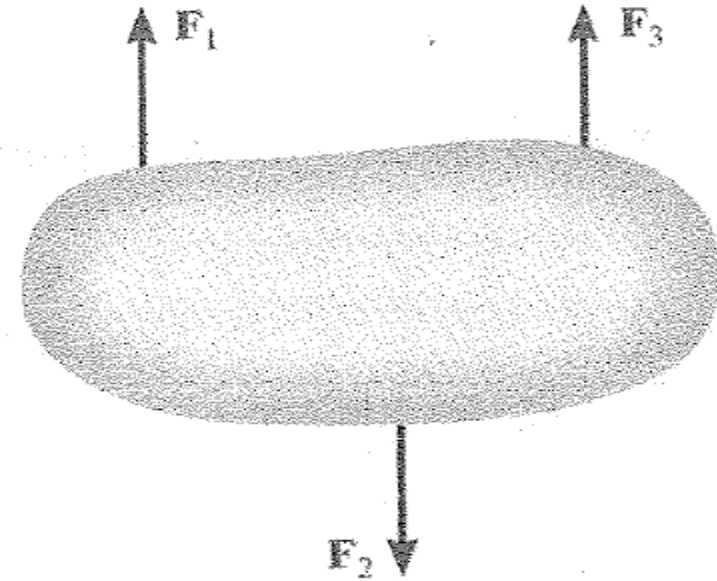
O noktasına göre moment dengesini, yani $\sum \mathbf{M}_O = 0$ koşulunu sağlamak için, üçüncü kuvvet de O noktasından geçmelidir; bu da kuvvet sisteminin aynı noktadan geçmesi demektir.

Üç kuvvetin ikisi paralel ise, Şekil 5-20b, O noktasının "sonsuz"da olduğu düşünülür ve bu "nokta"da kesişme olması için, üçüncü kuvvetin diğer iki kuvvete paralel olması gereklidir.



Aynı noktadan geçen kuvvetler

(a)



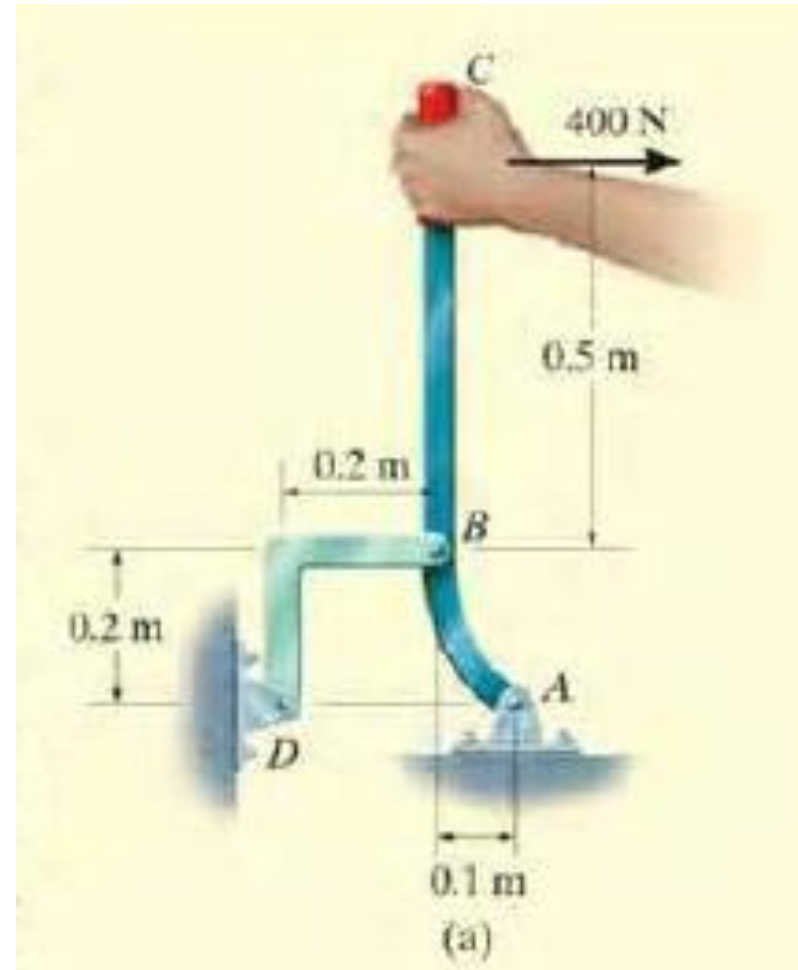
Paralel kuvvetler

(b)

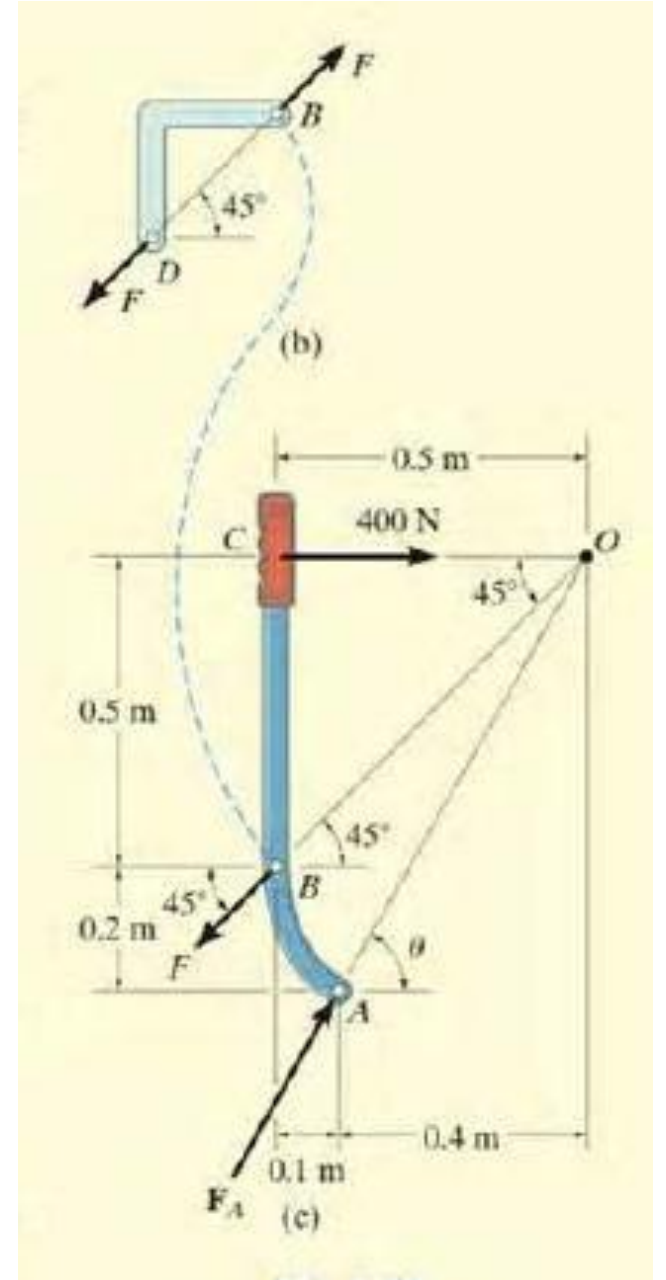
Şekil 5-20

Örnek 5-13

Şekil 5-21a'da gösterildiği gibi, ABC kolu, A'da mafsaldır ve BD parçasına bağlanmıştır. Elemanların ağırlıkları ihmal edilebildiğine göre, A 'da mafsalın kol üzerine uyguladığı kuvveti belirleyiniz?



Şekil 5-20



5.5 Serbest Cisim Diyagramı (Üç boyutlu Denge)

Üç boyutlu denge problemlerinin çözümünde ilk adım, iki boyutlu haldeki gibi, cismin (veya bir sistem olarak düşünülen cisim grubunun) serbest cisim diyagramını çizmektir. Ancak, bundan önce, mesnetlerde oluşabilecek tepki tiplerini ele almak gerekir.

Mesnet Tepkileri : Elemanlar üç boyutluda görselleştirilmek üzere, çeşitli mesnet ve bağlarda etkiyen tepki kuvvetleri ve kuvvet çifti momentleri Tablo 5-2'de verilmiştir.

Bu mesnetlerin her birini göstermekte kullanılan sembolleri tanımak ve her bir mesnette oluşan kuvvetleri ve kuvvet çifti momentlerini iyice anlamak önemlidir.

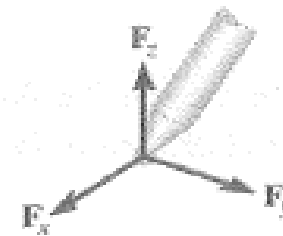
İki boyutlu halde olduğu gibi, ***kuvvet bağlı elemanın ötelenmesini kısıtlayan bir mesnet tarafından oluşturulur, buna karşı kuvvet çifti momenti bağlı elemanın dönmesi engellendiğinde ortaya çıkar.***

Örneğin, Tablo 5-2'deki küresel mafsallı (4) bağlı elemanın herhangi bir ötelenmesini önler, bu yüzden, bağ noktasında eleman üzerine bir kuvvet etkimelidir.

(4)



küresel mafsallı



Bu kuvvetin $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$ bilinmeyen büyüklüklerine sahip üç bileşeni vardır.

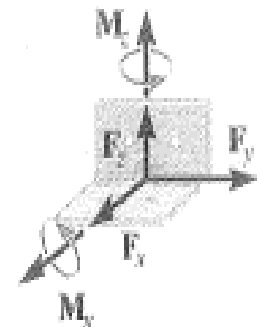
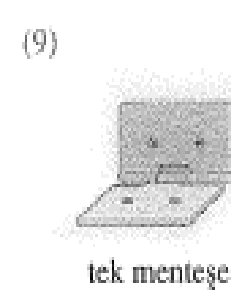
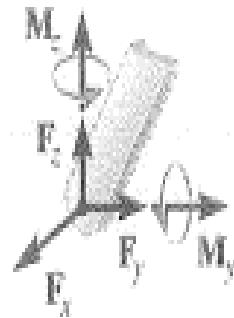
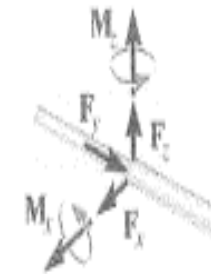
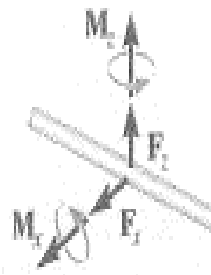
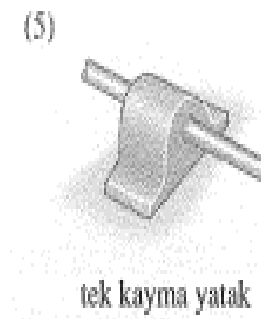
Bu bileşenler bilindiği takdirde, kuvvetin büyüklüğü,

$$F = \sqrt{\mathbf{F}_x^2 + \mathbf{F}_y^2 + \mathbf{F}_z^2}$$

α , β , γ doğrultu açıları ile tanımlı yönelimi bulunabilir, Denklem 2-7.

(5) ve (7) tek yatak mesnetleri, (8) tek pimi ve (9) tek menteşesinin hem kuvvet ve hem kuvvet çifti momentlerini taşıdığı gösterilmiştir.

Ancak, bu mesnetler, cismi dengede tutmak için başka yataklar, pimler veya menteşelerle birlikte kullanılmışsa, cisim yüklendiğinde rijitliğini koruyorsa ve cisme bağlanan mesnetler, uygun bir şekilde yerleştirilmişse, mesnetlerdeki kuvvet tepkileri tek başına cismi tutmada yeterli olabilir.



Diğer bir deyişle, kuvvet çifti momentleri fazlalık haline gelecek ve serbest cisim diyagramında ihmal edilebilecektir.

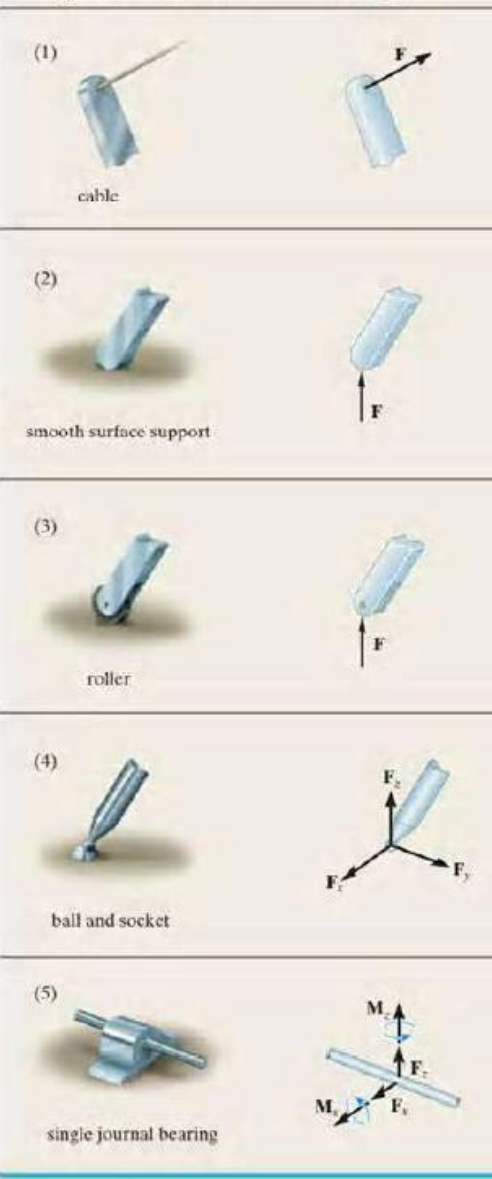
Bunun nedeni aşağıdaki örnekler incelendikten sonra daha iyi anlaşılacaktır.

Temel olarak, bu mesnetlerde kuvvet çifti momentleri oluşmayacaktır, çünkü cismin dönmesi, mesnet kuvvet çifti momentleriyle değil, diğer mesnetlerdeki tepkiler tarafından engellenir.

5.2 Üç Boyutlu Kuvvet Sistemlerine Maruz Rijit Cisim Mesnetleri

Bağ Tipleri Tepki

Bilinmeyen Sayısı



Bir bilinmeyen. Tepki kablo doğrultusunda elemandan uzaklaşan yönde etkiyen bir kuvvettir

Bir bilinmeyen. Tepki temas noktasında yüzeye dik etkiyen bir kuvvettir.

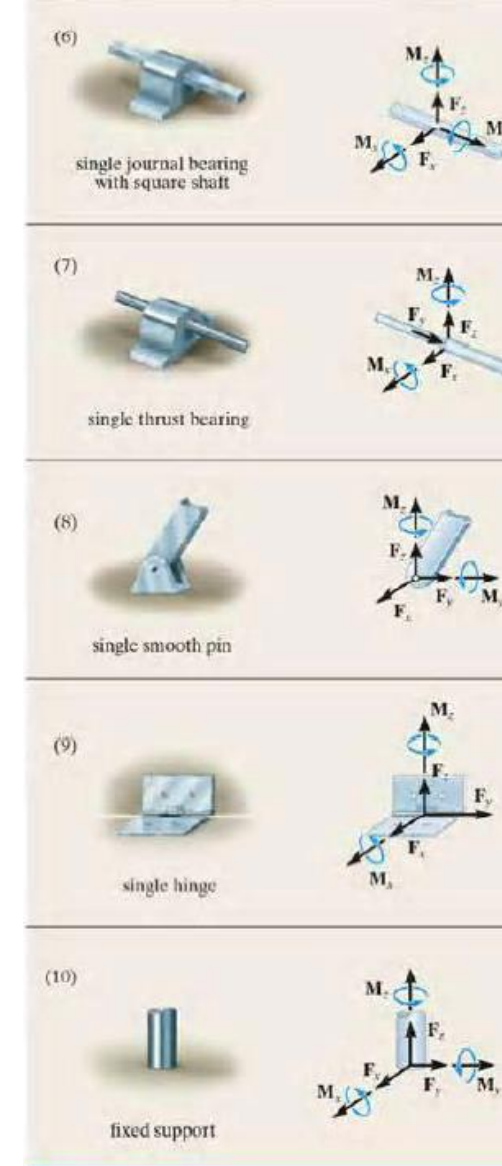
Bir bilinmeyen. Tepki temas noktasında yüzeye dik etkiyen bir kuvvettir.

Üç bilinmeyen. Tepkiler üç dik kuvvet bileşenidir.

Dört bilinmeyen. Tepkiler shafta dik etkiyen iki kuvvet ve iki kuvvet çifti momentidir.

Bağ Tipleri Tepki

Bilinmeyen Sayısı



Beş bilinmeyen. Tepkiler iki kuvvet ve üç kuvvet çifti momentidir.

Beş bilinmeyen. Tepkiler üç kuvvet ve iki kuvvet çifti momentidir.

Beş bilinmeyen. Tepkiler üç kuvvet ve iki kuvvet çifti momentidir.

Beş bilinmeyen. Tepkiler iki kuvvet ve üç kuvvet çifti momentidir.

Altı bilinmeyen. Tepkiler üç kuvvet ve üç kuvvet çifti momentidir.

Serbest Cisim Diyagramları: Rijit cismin serbest cisim diyagramı oluşturmanın genel yolu Bölüm 5.2'de açıklandı.

Temel olarak, önce cismi "soyutlayarak" genel hatlarını çizmek gerekir.

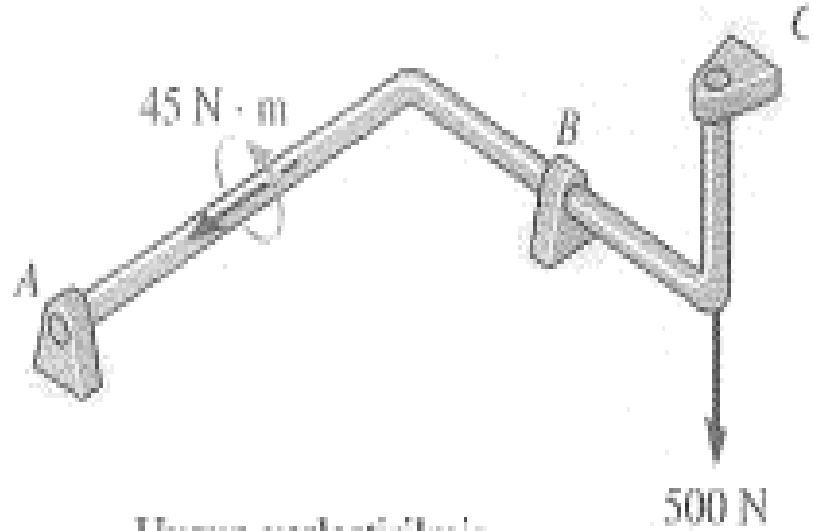
Bunu, oluşturulan x , y , z koordinat sisteminde bütün kuvvet ve kuvvet çifti momentlerini dikkatlice işaretlemek izlemelidir.

Genel bir kural olarak, bilinmeyen büyüklüğe sahip tepki kuvvetleri serbest cisim diyagramında pozitif yönde etki yormuş gibi gösterilir.

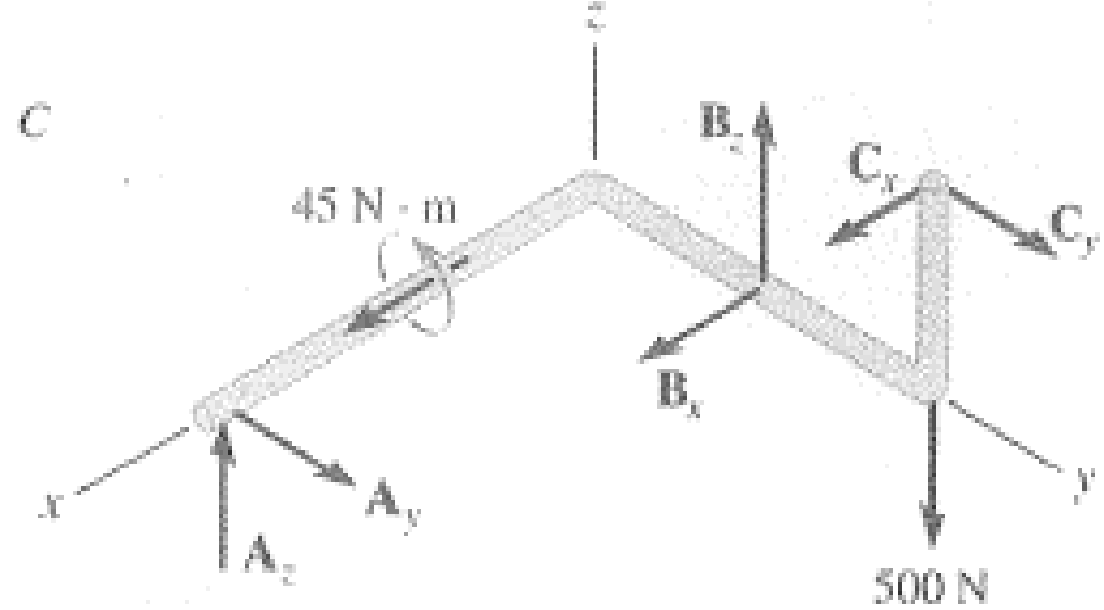
Bu yolla negatif değerler elde edildiği takdirde, bunlar bileřenlerin negatif koordinat yönlerinde etkidiđini gösterir.

Örnek 5-14

Aşağıdaki şekillerin üç boyutlu serbest cisim diyagramlarını çiziniz?



Uygun yerleştirilmiş
A, B, C'deki kayma yataklar.

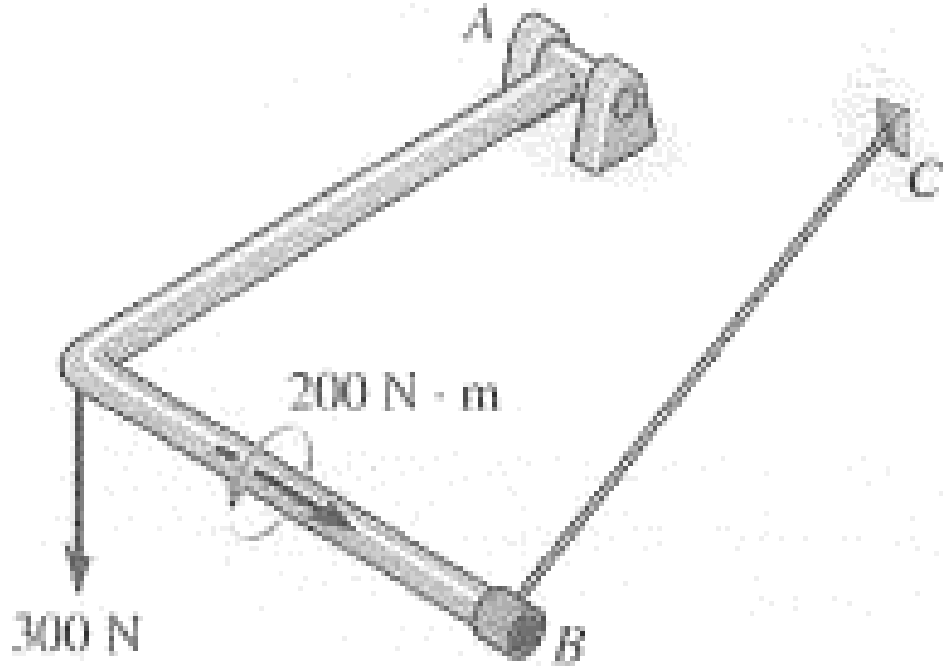


Yataklarca oluşturulan kuvvet tepkileri
kuvvet ve moment dengesi için yeterlidir,
çünkü bunlar milin koordinat eksenleri
etrafında dönmesini önler.

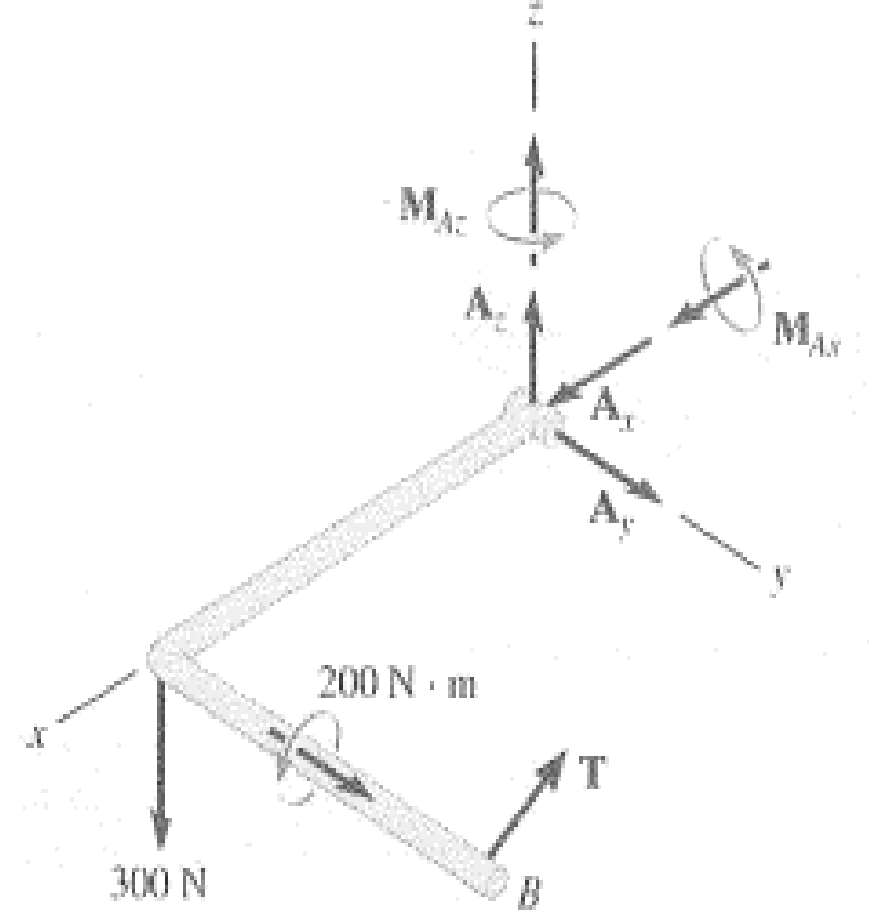
Şekil 5-22

Örnek 5-14

Aşağıdaki şekillerin üç boyutlu serbest cisim diyagramlarını çiziniz?



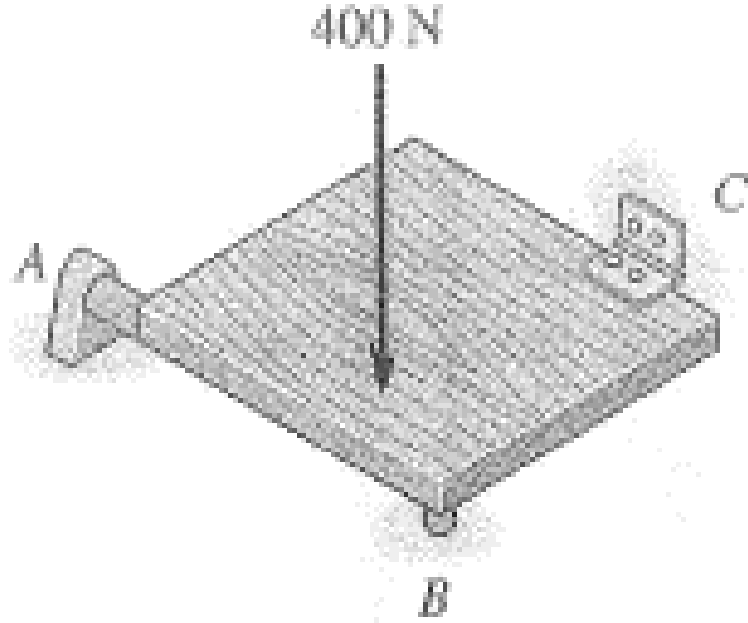
A'daki pim ve BC kablosu.



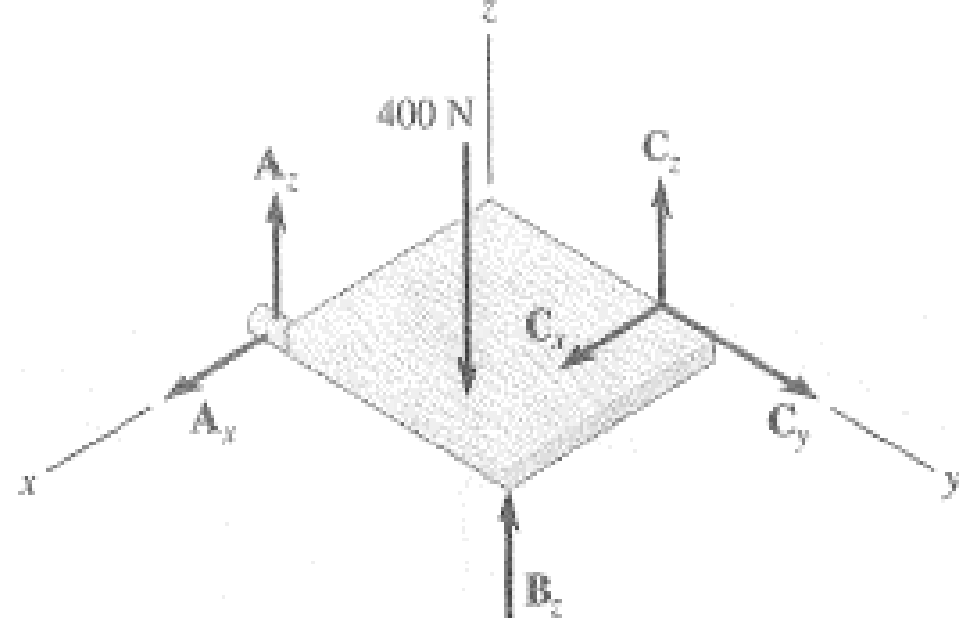
x ve z eksenleri etrafında dönmeyi engelleyen, çubuk üzerinde pim tarafından oluşturulan moment bileşenleri.

Örnek 5-14

Aşağıdaki şekillerin üç boyutlu serbest cisim diyagramlarını çiziniz?



Uygun yerleştirilmiş A 'daki kayma yatak ve C 'deki menteşe. B 'deki tekerlek.

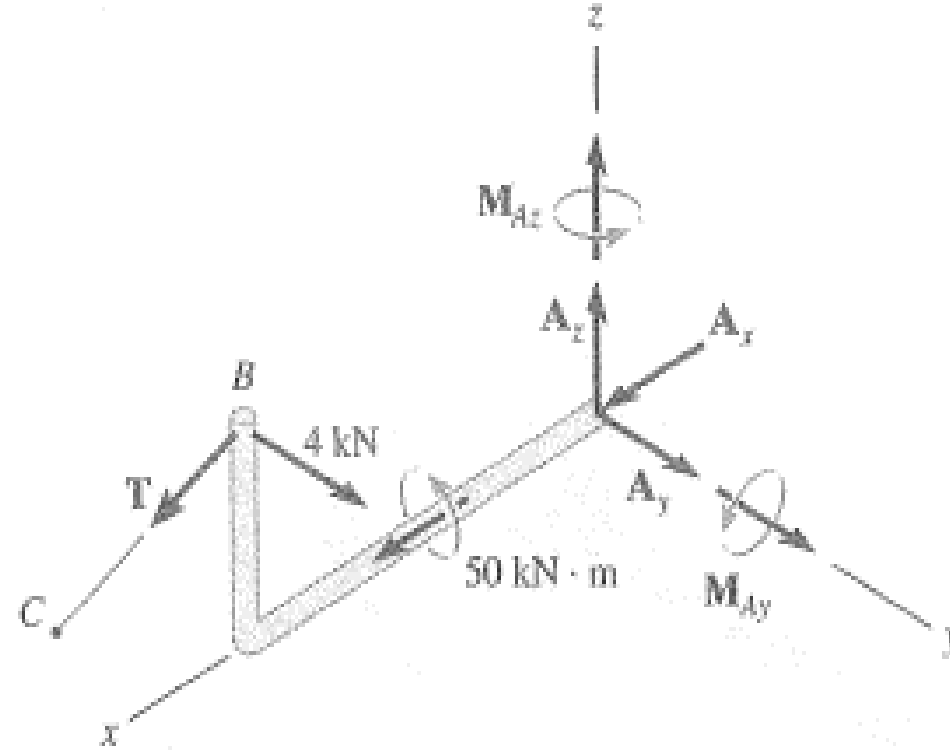
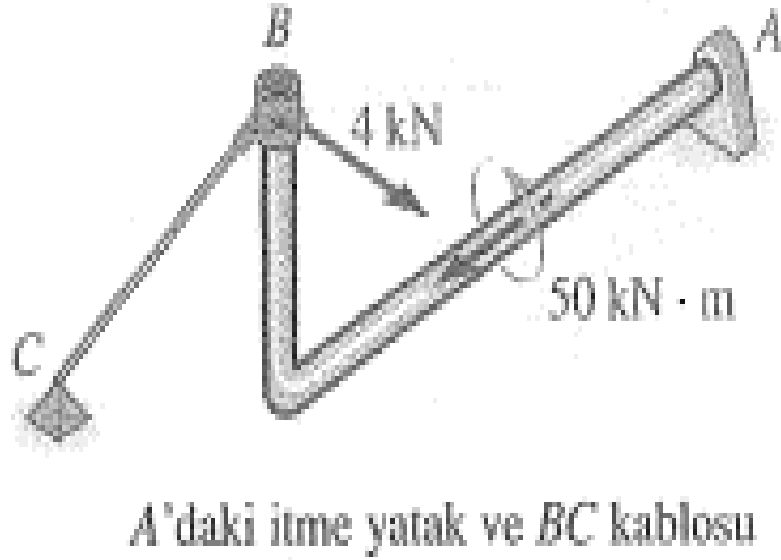


Her bir koordinat eksenini etrafında dönmeyi engelleyen, plak üzerinde yatak ve menteşe tarafından oluşturulan (sadece) kuvvet tepkileri. Menteşede hiç moment oluşmaz.

Şekil 5-22

Örnek 5-14

Aşağıdaki şekillerin üç boyutlu serbest cisim diyagramlarını çiziniz?



y ve z eksenleri etrafında dönmeyi engelleyen, çubuk üzerinde yatak tarafından oluşturulan moment bileşenleri.

Şekil 5-22

5.6 Denge Denklemleri

Bölüm 5.1 'de ifade edildiği gibi, üç boyutlu kuvvet sistemine maruz bir rijit cismin denge koşulları, cisme etkiyen bileşke kuvvet ve bileşke kuvvet çifti momentinin ikisinin de sıfıra eşit olmasını gerektirir.

Vektörel Denge Denklemleri : Bir rijit cismin denge koşulları, $\sum \mathbf{F}$ cisim üzerine etkiyen bütün dış kuvvetlerin vektörel toplamı, $\sum \mathbf{M}_O$ kuvvet çifti momentleri ile bütün kuvvetlerin cisim içinde veya dışında yer alan bir O noktasına göre momentleri toplamını göstermek üzere, matematiksel olarak

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{M}_O = 0 \quad (5-5)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Skaler Denge Denklemi: Uygulanan bütün dış kuvvet ve kuvvet çifti momentleri kartezyen vektör şeklinde ifade edilir ve bunlar Denkler (5-5)'e yerleştirilirse

$$\sum \mathbf{F} = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{M}_O = \sum M_x \mathbf{i} + \sum M_y \mathbf{j} + \sum M_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

i, **j** ve **k** bileşenleri birbirinden bağımsız olduğundan, yukarıdaki denklemler

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = \mathbf{0} \quad (5-6a)$$

$$\sum M_x = \mathbf{0}$$

$$\sum M_y = \mathbf{0}$$

$$\sum M_z = \mathbf{0} \quad (5-6b)$$

olması halinde sağlanır.

Bu altı skaler denge denklemi serbest cisim diyagramında gösterilen en fazla altı bilinmeyeni çözümede kullanılır.

Denklem 5-6a, x , y ve z doğrultularında etkiyen dış kuvvet bileşenlerinin toplamının sıfır olması, Denklem 5-6b de x , y ve z eksenlerine göre moment bileşenlerinin toplamının sıfır olması gerektiğini ifade eder.

5.7 Rijit Cisim için Bağlar

Rijit cismin dengesinin sağlanması için, sadece denge denklemlerinin gerçekleşmesi yeterli değildir; cismin, aynı zamanda uygun şekilde tutturulması veya mesnetlerle bağlanması gerekir.

Bazı cisimler denge için yeterli sayıda mesnede sahip olmayabilir veya mesnetler cismin devrilmesine yol açabilecek şekilde düzenlenmiş olabilir, buna karşın, bazı cisimler de gerekenden fazla mesnede sahip olabilir.

Bu durumların her biri aşağıda ele alınacaktır.

Fazla Bağlar: Bir cisim, gereksiz, yani, cismi dengede tutmak için gerekenden fazla, mesnede sahip ise, statik olarak belirsiz hale gelir.

Statik olarak belirsizlik, cisim üzerindeki bilinmeyen yükleme sayısının, bu yüklemelerin çözümü için kullanılabilen denge denklemi sayısından daha fazla olduğunu ifade eder.

Örneğin, Şekil 5-23a ve Şekil 5-23b'de serbest cisim diyagramları ile gösterilen iki ve üç boyutlu problemin ikisi de, ilave mesnet tepkilerinden dolayı statikçe belirsizdir.

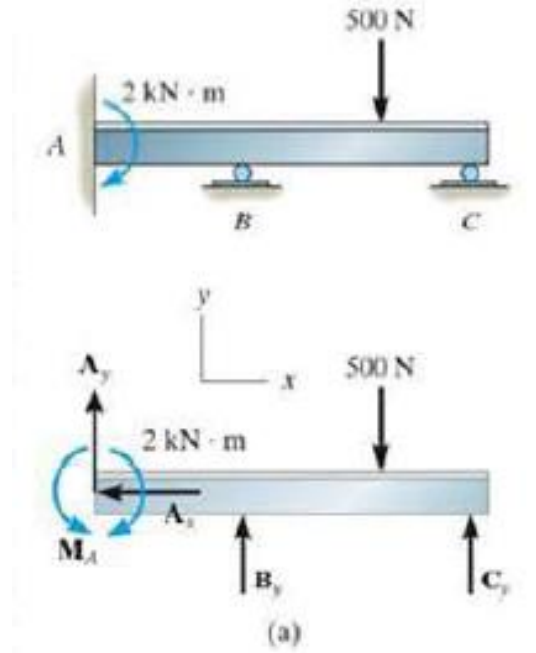
İki boyutlu durumda, M_A , A_x , A_y , B_y ve C_y olmak üzere beş bilinmeyen olduğu halde, bunlar için sadece üç denge denklemi yazılabilir.

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum \mathbf{M}_O$$

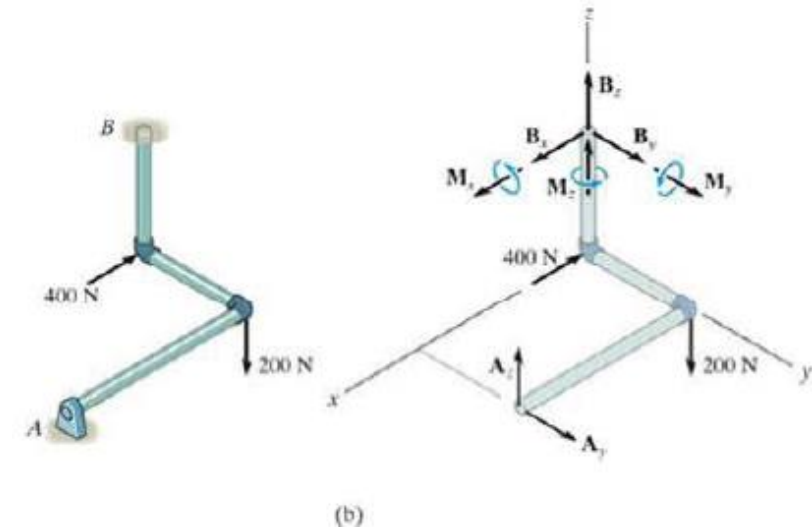
Üç boyutlu problem ise sekiz bilinmeyene sahiptir ve bunlar için sadece altı denge denklemi yazılabilir.

Şekil 5-23 'te gösterilen tipteki belirsiz problemleri çözmek için, genellikle, mesnet noktalarındaki deformasyon koşullarından elde edilen, ek denklemler gereklidir.

Bu denklemler, cismin, "malzeme mekaniği" gibi şekil değiştirme mekaniği ile ilgili metinlerde incelenen, fiziksel özelliklerini içerir.



Şekil 5-23



Uygunuz Bağlar: Bazı durumlarda, cisim üzerindeki bilinmeyen kuvvet sayısı denge denklemi sayısı kadar olsa da, mesnetlerdeki uygunuz bağ kuvvetleri nedeniyle cismin kararsızlığı ortaya çıkabilir.

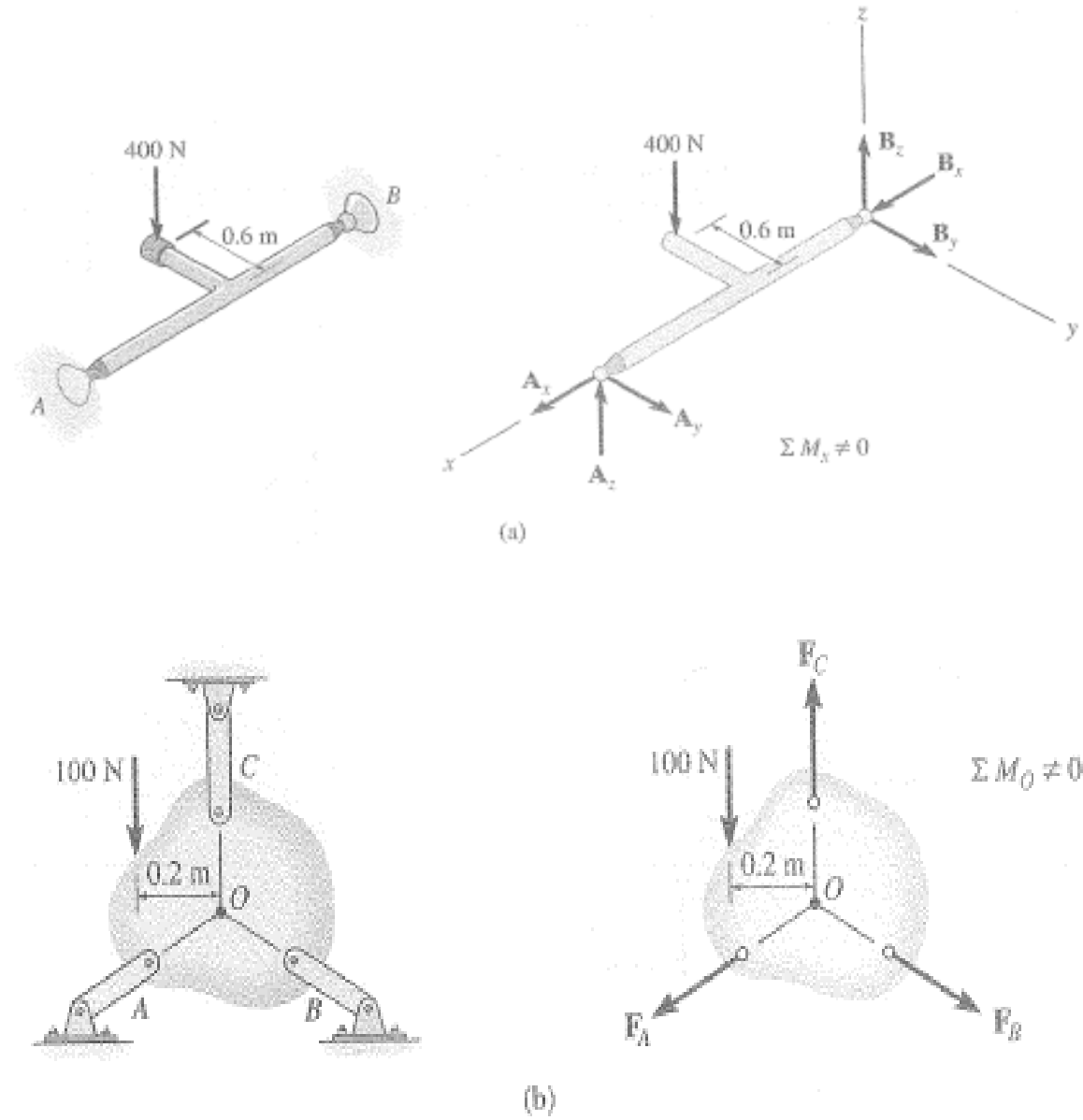
Üç boyutlu problemlerde, mesnet tepkilerinin tümü aynı bir eksen keserse cisim uygunuz bağlıdır.

Dolayısıyla, bütün tepki kuvvetleri bu noktada birleştiği zaman, cisim uygunuz bağlıdır.

Bu durumla ilgili örnekler Şekil 5-24'te verilmektedir.

Serbest cisim diyagramlarından, x eksenine göre, Şekil 5-24a, O noktasına göre, Şekil 5-24b, momentlerin toplamının sıfıra eşit olmadığı görülür:

dolayısıyla x eksenine veya O noktası etrafında dönme olacaktır.

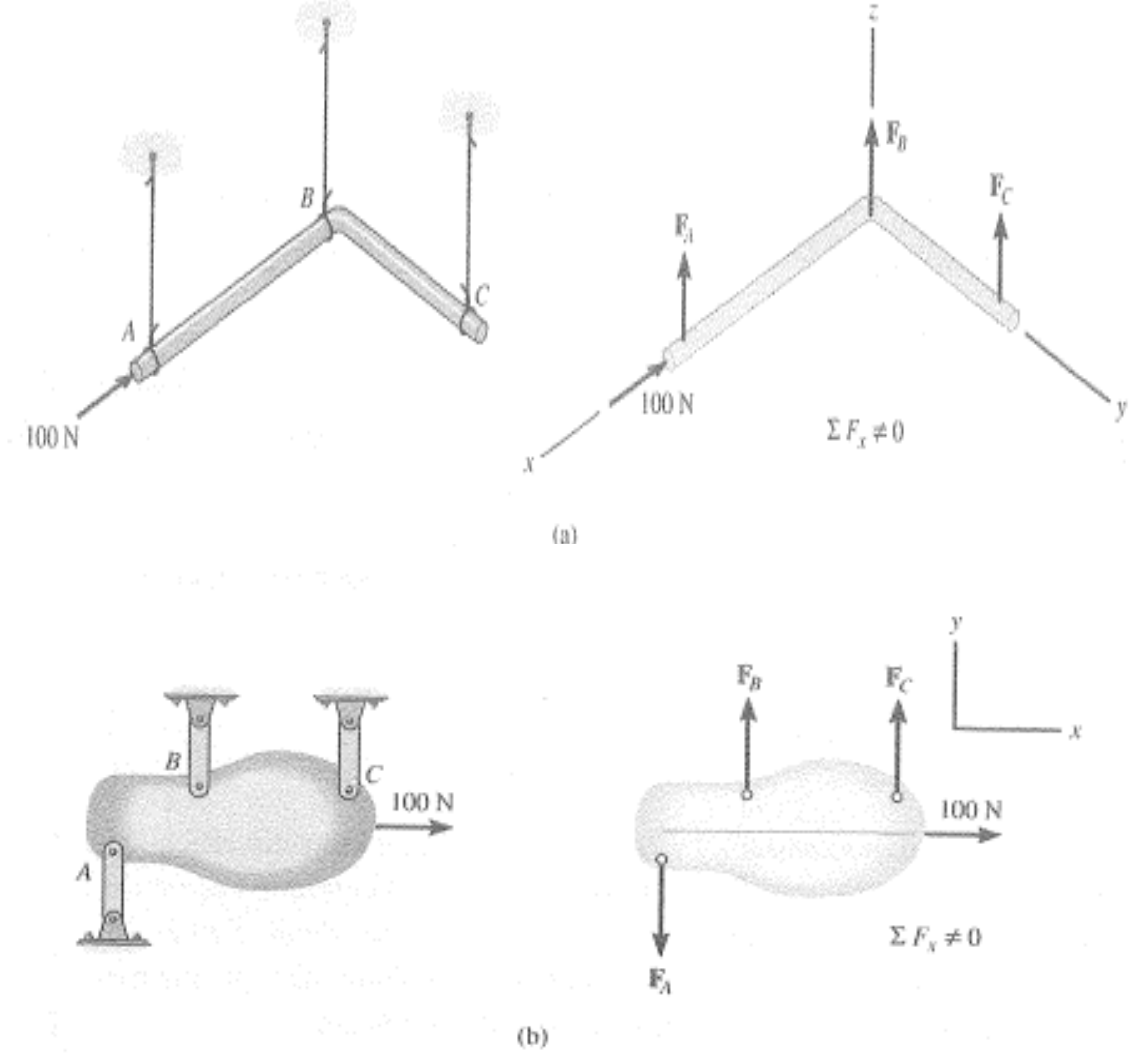


Şekil 5-24

Uygunsuz bağların kararsızlığa neden olmasının bir başka şekli bütün tepki kuvvetleri paralel olduğunda ortaya çıkar.

Bu durumla ilgili iki ve üç boyutlu örnekler Şekil 5-25'te gösterilmektedir.

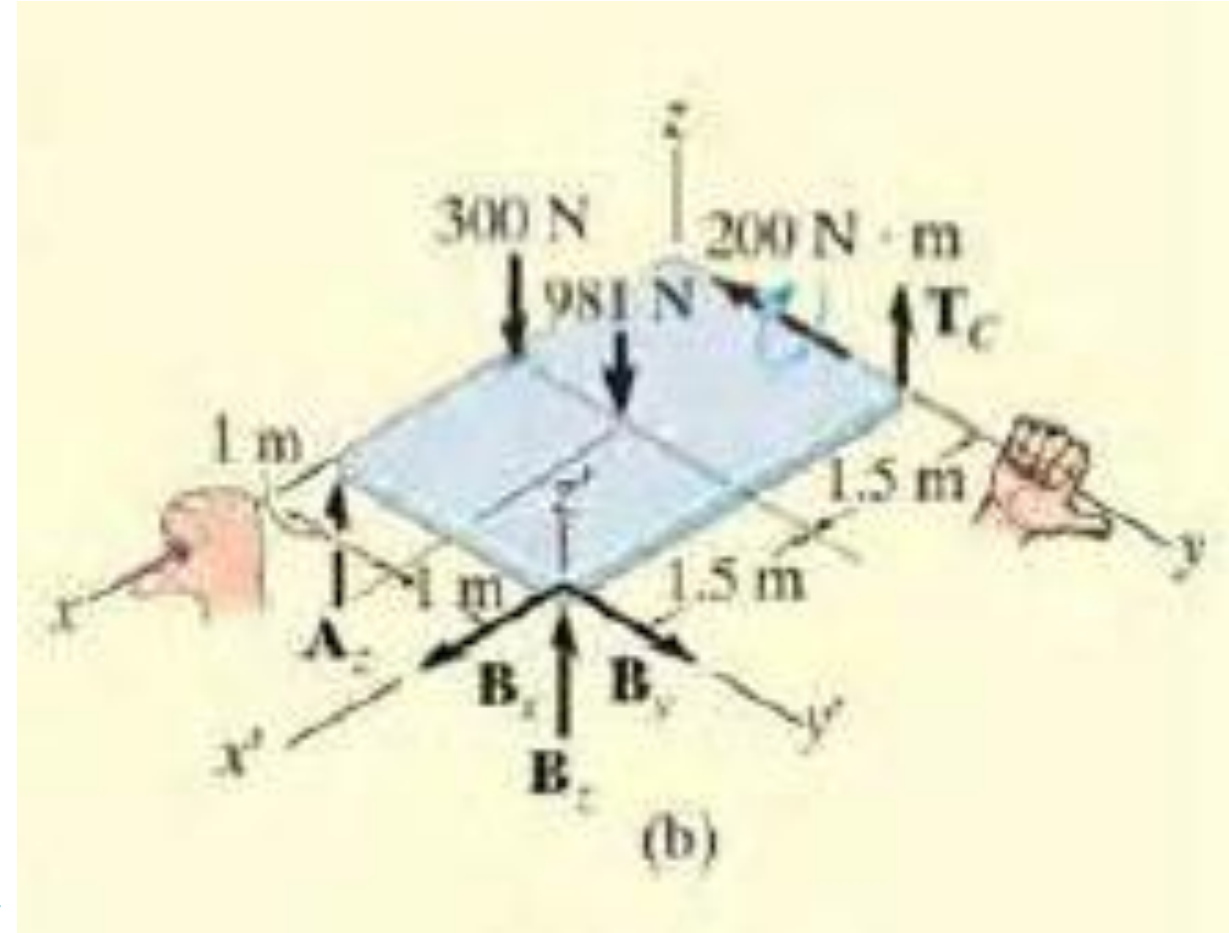
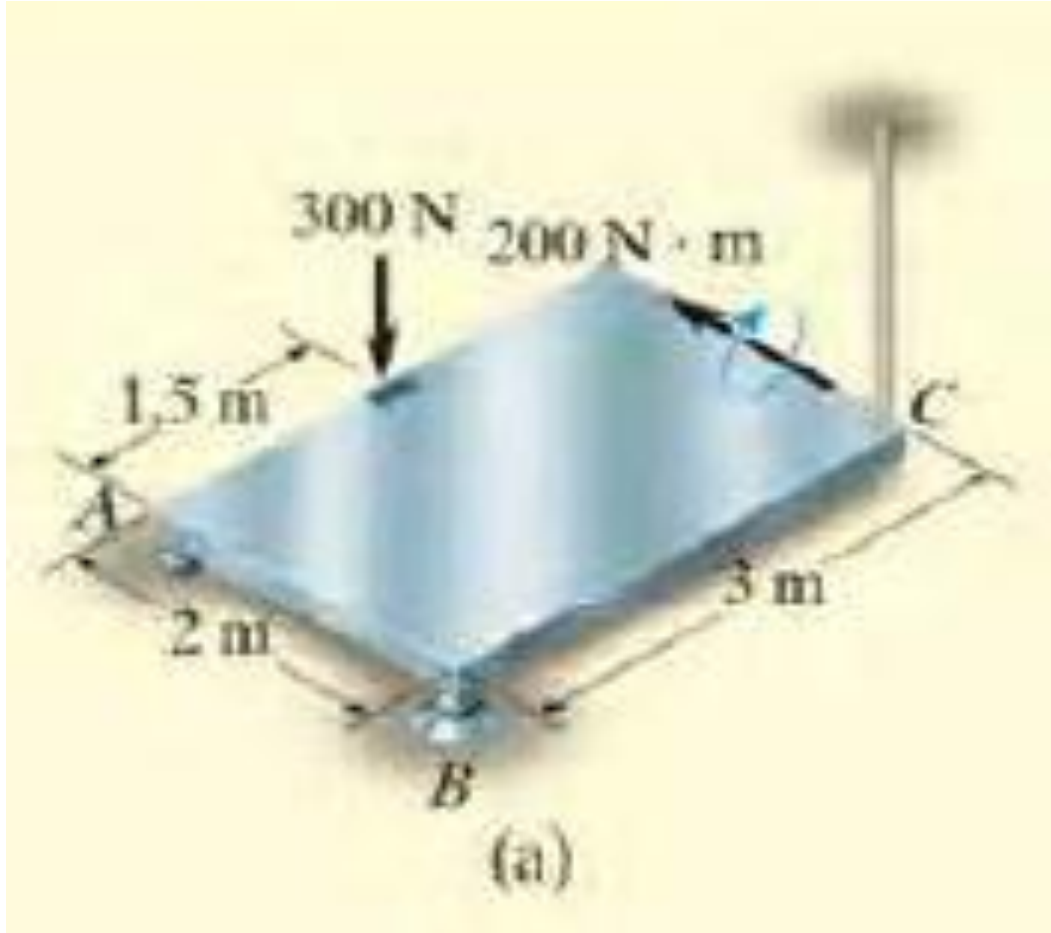
Her iki durumda da, x eksenini doğrultusundaki kuvvetlerin toplamı sifıra eşit olmaz.



Şekil 5-25

Örnek 5-15

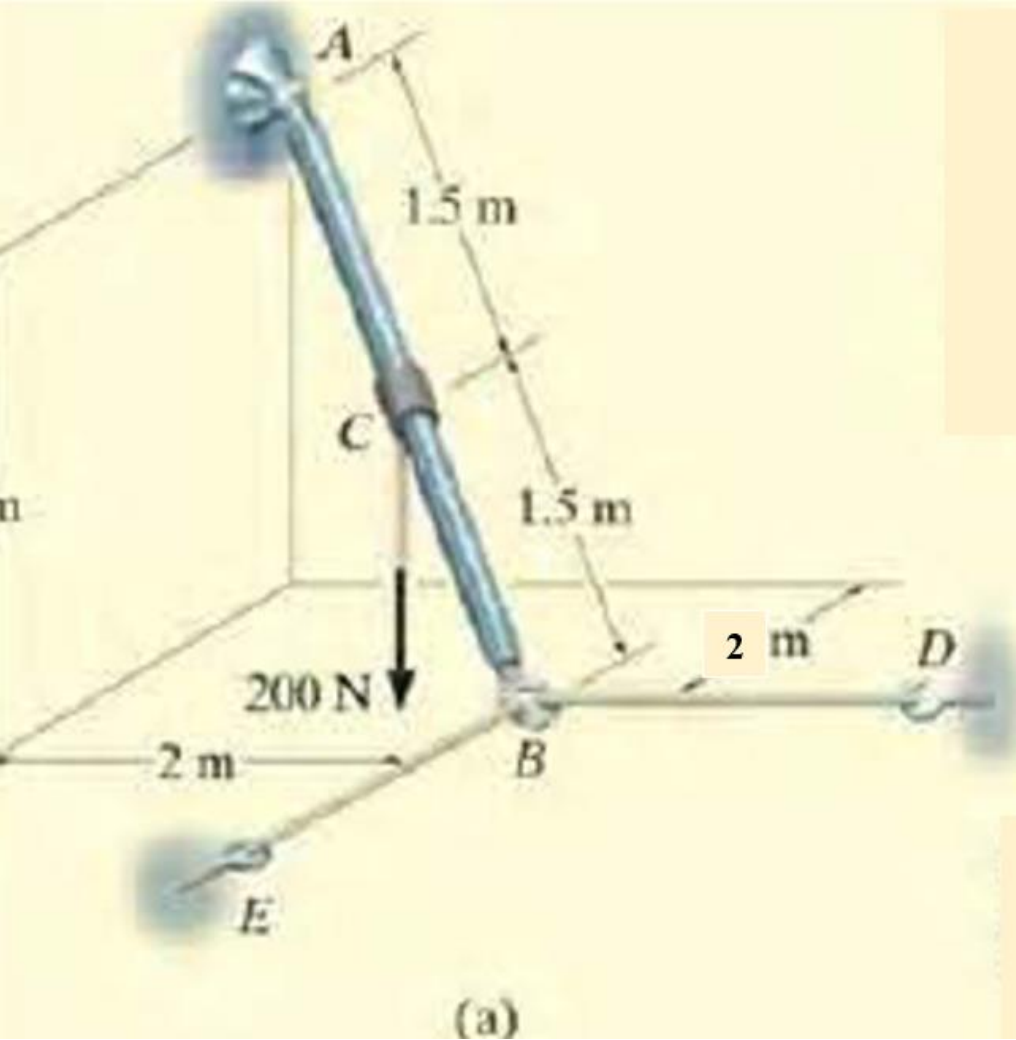
Şekil 5-27a'da gösterilen 100 kg kütleli homojen plak, kenarları boyunca bir kuvvet ve kuvvet çifti momentine maruzdur. Plak, A 'daki tekerlek, B'deki küresel mafsal ve C'deki kordonla yatay düzlemde tutulduğuna göre, mesnetlerdeki tepki bileşenlerini belirleyiniz?



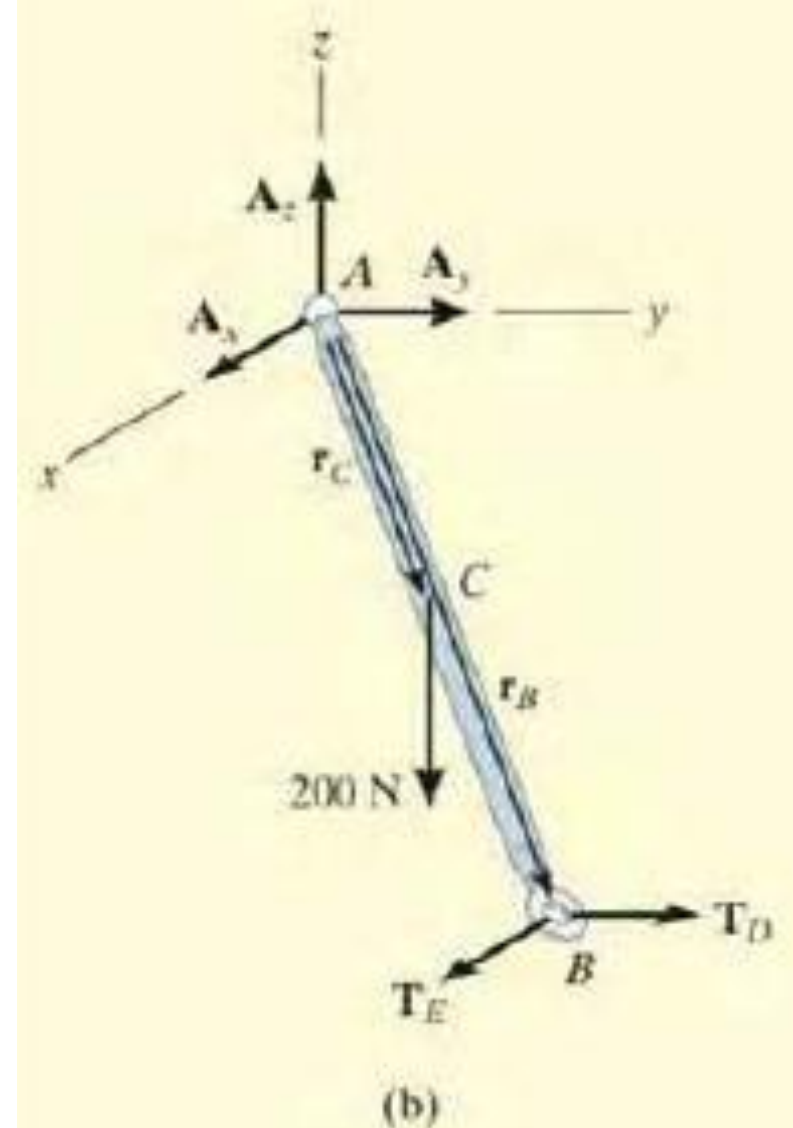
Şekil 5-27

Örnek 5-18

Şekil 5-30a'da gösterilen AB çubuğu 200 N'luk kuvvet etkisindedir. A küresel mafsalındaki tepkileri ve BD ve BE kablolarındaki çekme kuvvetlerini belirleyiniz?

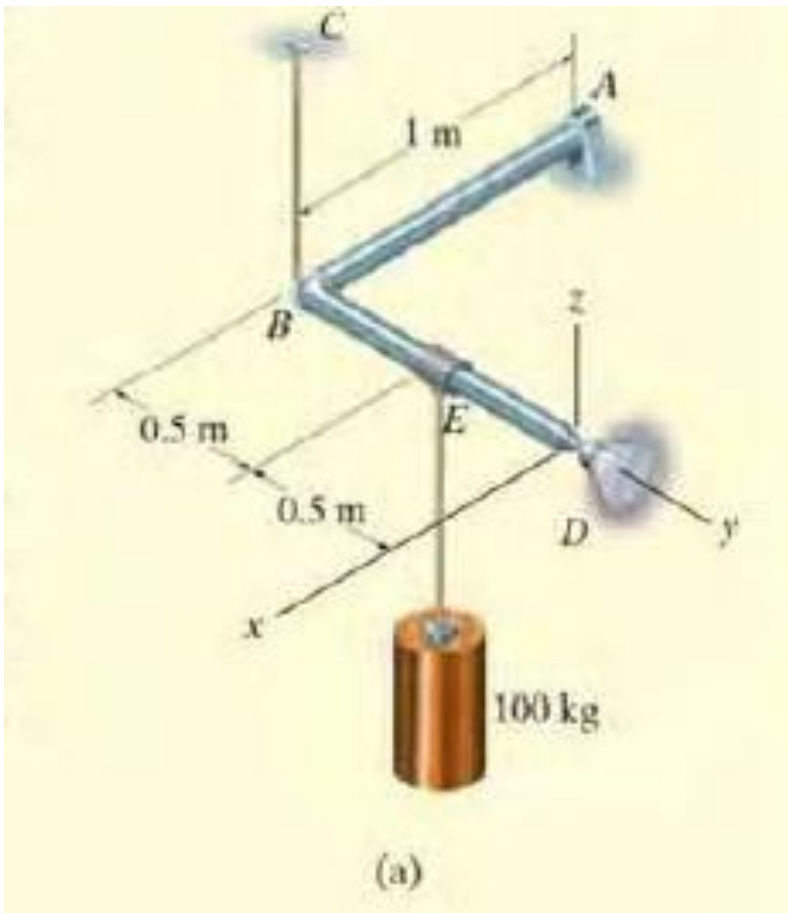


Şekil 5-30

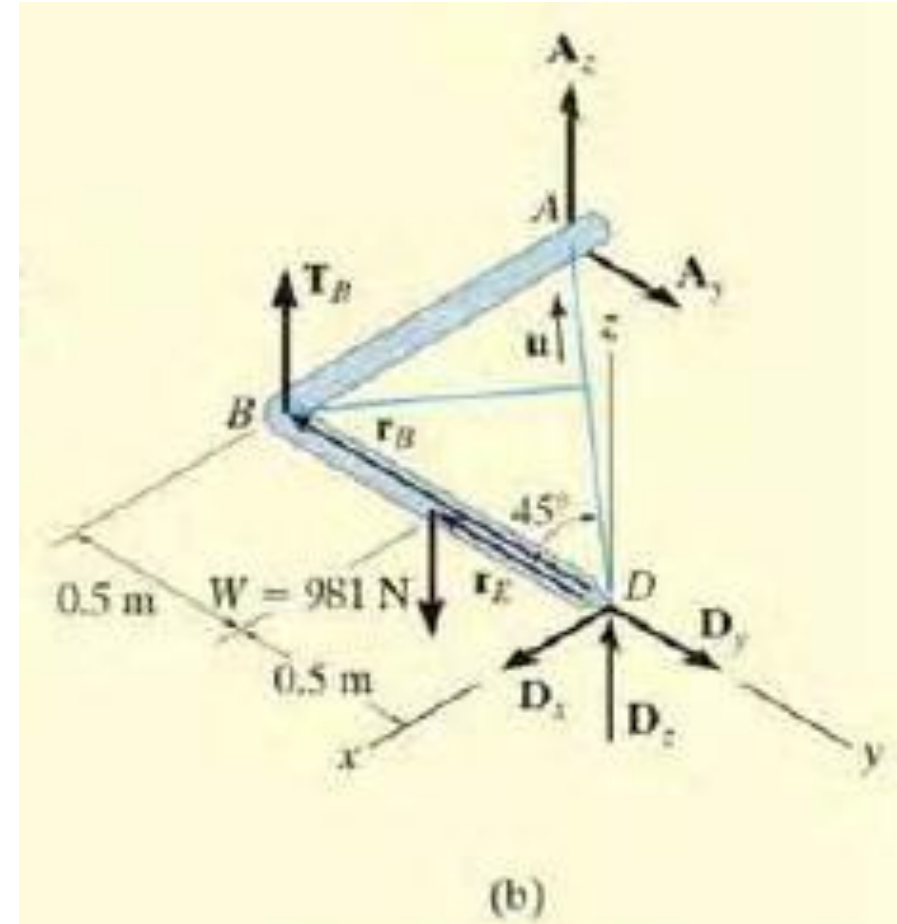


Örnek 5-19

Şekil 5-31a'daki bükülmüş çubuk A'daki kayma yatak, D'deki küresel mafsall ve B'deki BC ipiyle tutulmaktadır. Sadece bir denge denklemi kullanarak, BC ipindeki çekme kuvvetini elde ediniz? A 'daki yatak, şaft üzerinde uygun yerleştirilmiş olması nedeniyle, sadece z ve y doğrultularında kuvvet bileşenleri uygulayabilmektedir.



Şekil 5-31



Örnek 5-19

Şekil 5-3la'daki bükülmüş çubuk A'daki kayma yatak, D'deki küresel mafsall ve B'deki BC ipliyle tutulmaktadır. Sadece bir denge denklemi kullanarak, BC ipindeki çekme kuvvetini elde ediniz? A 'daki yatak, şaft üzerinde uygun yerleştirilmiş olması nedeniyle, sadece z ve y doğrultularında kuvvet bileşenleri uygulayabilmektedir.

